

NOTAS DE CÁTEDRA
UNIDAD N° 4: DETERMINANTE Y RANGO DE UNA MATRIZ. TEOREMA DE
ROUCHÉ- FROBENIUS (R-F)

1. Rango de una matriz

El rango de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la máxima cantidad de filas o columnas de la matriz A que componen un conjunto *linealmente independiente*. Se denota $rg(A)$.

Para obtener el rango de una matriz A cualquiera, este resultará ser la cantidad de filas *no nulas* que posea la matriz escalonada asociada a la matriz A .

Si algún elemento de la matriz es distinto de cero, entonces su rango es mayor o igual que 1. En caso contrario, o sea, la *matriz nula*, el rango será 0.

Propiedades del rango de una matriz:

- a) El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta, es decir, $rg(A) = rg(A^t)$
- b) El rango no varía si se cambia el orden de líneas (filas o columnas) paralelas.
- c) El rango no varía si se multiplica una línea por un número distinto de 0.
- d) El rango no varía si una línea es reemplazada por la suma de esta con otra paralela a ella multiplicada por un número cualquiera distinto de 0.

1.1 Cálculo del rango de una matriz dada mediante el método de Gauss

Si la matriz A tuviese más filas que columnas, se puede usar para el cálculo del rango, su traspuesta.

Mediante las operaciones elementales entre filas, se buscará “hacer” **ceros** todos los elementos por debajo de la diagonal principal de A . Es decir, determinar una *matriz escalonada*. El rango de la matriz A es la *cantidad de filas no nulas* que tenga dicha matriz escalonada.

Ejemplo: Calcular el rango de la siguiente matriz mediante el método de Gauss:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1)F_1 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$(-2) \cdot F_1 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$(-1)F_2 + F_3 \rightarrow F_3$$

El rango de la matriz M es la **cantidad de filas no nulas** de la matriz escalonada M_2 , por lo tanto, $rg(M) = 2$.

Podemos ver un ejemplo interesante en el siguiente video donde interviene el concepto de rango con parámetros:

https://youtu.be/coPTA_i-QVQ



Si en algún video se explica algo que contradice lo dicho en las Notas de Cátedra, no dudes en consultar con tu docente o en las clases de consulta.

2. Determinante de una matriz (revisar la Unidad Nro. 0)

La función determinante es una correspondencia que le asigna a cada *matriz cuadrada* A , un **único número real**. Se simboliza $\det(A)$ ó $|A|$.

• Determinante de una matriz de orden 1

Si $A = [a_{11}]$, se define $\det(A) = a_{11}$

• Determinante de una matriz de orden 2

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se define $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

• Determinante de una matriz de orden $n > 2$ (Regla de Laplace)

Para cada $1 \leq i \leq n$, para cada $1 \leq j \leq n$:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}, \quad (\text{desarrollo por la } i - \text{ésima fila})$$

O bien

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}, \quad (\text{desarrollo por } j - \text{ésima columna})$$

El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota C_{ij} y se conoce como *cofactor del elemento a_{ij}* .

Ejemplo1: Si $A = [-2]$ entonces $\det(A) = |A| = (-2)$

Ejemplo 2: Si $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ entonces $\det(A) = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = 14$

Ejemplo 3: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcular el determinante de A

desarrollándolo por los cofactores de los elementos de la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} = \\ \det(A) &= (1)(1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (2)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (4)(1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ \det(A) &= 7 \end{aligned}$$

Propiedades del determinante de una matriz: Sean A y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) $\det(A^t) = \det(A)$

b) $\det(kA) = k^n \det(A)$ donde $k \in \mathbb{R}$

c) El determinante del producto de matrices es el producto de sus determinantes:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

d) Si la matriz A es invertible, el determinante de su inversa es el inverso multiplicativo del determinante de A . Es decir, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

e) El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es 0.

f) Si se cambia el orden de una fila o de una columna, el determinante cambia de signo.

g) Si se obtiene una nueva matriz a partir del reemplazo de una línea (una fila o una columna) por la suma de esta con otra línea de A paralela a ella multiplicada por un número cualquiera distinto de 0, el determinante de la nueva matriz es igual al $\det(A)$.

h) Si A es una matriz triangular entonces $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

2.1 Cálculo del determinante de una matriz por el método de Gauss (o por triangulación)

Se buscará triangular la matriz A mediante la aplicación de operaciones entre filas y la aplicación de dos propiedades **g)** y **h)** que cumplen los determinantes:

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \left(\frac{7}{2}\right) \end{bmatrix}$ es una matriz triangular.

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &\rightarrow F_2 & \left(\frac{5}{2}\right)F_2 + F_3 &\rightarrow F_3 \\ (-3)F_1 + F_3 &\rightarrow F_3 \end{aligned}$$

De modo que, por la propiedad **h)** de determinante se tiene que:

$$\det(A) = \det(A_2) = 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) = 7$$

Podemos ver otro ejemplo en el siguiente video:

<https://youtu.be/ajvwN6FogKI>



3. Inversión de una matriz

Matriz Inversa: Dada una matriz cuadrada A de orden n , si existe otra matriz B que verifique $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (matriz identidad de orden n), entonces se dice que B es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1} .

Nota: Si B es la inversa de A , A es la inversa de B

3.1 Criterio del determinante de una matriz para la invertibilidad de la misma.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se tiene que:

- a) Si $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ entonces se dice que la matriz A es *regular* o *invertible*.
- b) Si $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \nexists A^{-1}$ entonces se dice que la matriz A es *singular*.

Cálculo de la matriz inversa a una matriz dada por Gauss-Jordan

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se construye una matriz tal $[A|I_n]$ y transformándola mediante operaciones entre filas de A (las mismas que se describieron entre las ecuaciones de un SEL) se obtiene la matriz $[I_n|B]$ tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n, \text{ es decir, } B = A^{-1}$$

Ejemplo: Dada la matriz A de orden n , determine si es invertible, en caso de serlo calcule A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ como } \det(A) = 6 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \neq 0 \text{ se tiene que } A \text{ es regular.}$$

Se construye la matriz $[A|I_2]$. De modo que se tiene $\begin{bmatrix} 6 & 5 & : & 1 & 0 \\ -3 & 2 & : & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y por medio de operaciones elementales entre fila:

$$\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & : & 1 & 0 \\ -3 & 2 & : & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}F_1 \rightarrow F_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & : & \frac{1}{6} & 0 \\ -3 & 2 & : & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3F_1+F_2) \rightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & : & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{27}{6} & : & \frac{3}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{6}{27}F_2 \rightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & : & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & : & \frac{3}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{6}F_2+F_1 \rightarrow F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{2}{27} & -\frac{5}{27} \\ 0 & 1 & : & \frac{3}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix}$$

Se llega a la matriz $[I_2|B]$ y efectuada la verificación de $A \cdot B = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{-5}{27} \\ \frac{3}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Se puede afirmar que } B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{-5}{27} \\ \frac{3}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denomina matriz adjunta de A , que se denota $Adj(A)$, a la matriz que tiene la misma dimensión que A y se obtiene a partir de transponer una matriz C cuyos elementos son los cofactores de los correspondientes elementos de A .

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ determine la $Adj(A)$.

En primer lugar, se calculan los cofactores de los correspondientes elementos de A :

$$a_{11}=6 \text{ entonces } C_{11}=(-1)^{1+1} \det [2]=2 \qquad a_{12}=5 \text{ entonces } C_{12}=(-1)^{1+2} \det [-3]=3$$

$$a_{21}=-3 \text{ entonces } C_{21}=(-1)^{2+1} \det [5]=-5 \qquad a_{22}=2 \text{ entonces } C_{22}=(-1)^{2+2} \det [6]=6$$

Con los cofactores obtenidos se construye una matriz $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

Luego se transpone dicha matriz C y se obtiene la $Adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Cálculo de la matriz inversa de una matriz dada mediante el método de la adjunción

El método de la adjunción para el cálculo de la matriz inversa a una dada consiste en la aplicación de la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$$

Es decir, la matriz inversa de la matriz A resulta de la multiplicación entre la **matriz adjunta** de A y el inverso multiplicativo del determinante de la matriz A .

Podemos ver un ejemplo en el siguiente video:

<https://youtu.be/QVoPbT1vNNw>



Ahora si se pretende calcular la inversa de A bastará con aplicar: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{-5}{27} \\ \frac{3}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix}$$

Es decir, la misma matriz obtenida por el método de Gauss-Jordan

Relación entre un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, $\det(A)$ y A^{-1}

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A.X=B$ (escrito en forma matricial) donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de coeficientes), $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (matriz de incógnitas) y $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (matriz de términos independientes)

1) Si $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ entonces

$$\begin{aligned} A.X &= B \\ A^{-1} \cdot (A.X) &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A).X &= A^{-1} \cdot B \\ I_n.X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

como A^{-1} es única entonces X es única y X representa *la solución del sistema de ecuaciones lineales*. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales es *compatible determinado*.

2) Si $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \nexists A^{-1}$ entonces el sistema de ecuaciones lineales NO es compatible determinado pudiendo ser *compatible indeterminado* o *incompatible*.

Caso particular

Sea $A.X=N$ donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de coeficientes), $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (matriz de incógnitas) y $N \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (una matriz nula de términos independientes) entonces si el $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \nexists A^{-1}$ el sistema de ecuaciones lineales NO es compatible determinado sino *compatible indeterminado*.

4. Teorema de Rouché-Fröbenius

El enunciado del teorema atribuido al matemático francés Eugène Rouché y al alemán Georg Ferdinand Frobenius hace posible la clasificación de un *sistema de ecuaciones lineales*, $A.X=B$ según su conjunto solución. Básicamente, este teorema se basa en el análisis de los rangos de las matrices de coeficientes, A y la ampliada $[A|B]$ asociadas al sistema y la cantidad de incógnitas que posee dicho SEL.

Sean A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $[A|B]$ la matriz ampliada del mismo:

- Si los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada son iguales, el sistema es **compatible**. Si la cantidad de incógnitas es igual a dicho rango, será **determinado** y si la cantidad de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es **indeterminado**.
- Cuando los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada son distintos, el sistema es **incompatible**.

En particular, en los sistemas lineales homogéneos, el rango de la matriz ampliada es siempre igual al rango de la matriz de coeficientes, ya que ambas matrices se diferencian solamente en una columna de ceros.

Ejemplo 1:
$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = 1 \\ x & +2y & +3z & = 3 \\ 3x & +2y & +z & = 0 \end{cases}$$

(a) La matriz de coeficientes del SEL es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Se calculará el $rg(A)$. Para ello se usará la calculadora online que se puede hallar

en el link: <https://matrixcalc.org/es/> . Y se obtiene que $rg(A) = 3$

(b) La matriz ampliada del sistema es $[A|B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 1 \\ 1 & 2 & 3 & : & 3 \\ 3 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 1 \\ 1 & 2 & 3 & : & 3 \\ 3 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & : & \frac{5}{2} \\ 3 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & : & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & : & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & : & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{2} & : & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \quad \left(-\frac{3}{2}\right)F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \quad \left(-\frac{1}{3}\right)F_2 + F_3 \rightarrow F_3$$

Se determina su rango y se obtiene que en la última matriz no hay ninguna fila nula, por lo tanto, $rg[A|B] = 3$

(c) La **cantidad de incógnitas** que tiene el SEL es tres (3)

Por (a), (b) y (c) y según el teorema de Rouché-Frobenius se puede concluir que el sistema es **compatible determinado**.

De hecho, si se calculan los valores de x, y, z . Su conjunto solución es: $S = \{(-5/8; 1/2; 7/8)\}$

Ejemplo 2:
$$\begin{cases} 2x & +y & +3z & = 2 \\ 3x & +y & +4z & = 3 \\ 2x & +3y & +5z & = 5 \end{cases}$$

(a) La matriz de coeficientes del SEL es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Se calculará el $rg(A)$. Para ello se usará la calculadora online que se puede hallar en el link: <https://matrixcalc.org/es/> . Y se obtiene que $rg(A) = 2$

(b) La matriz ampliada del sistema es $[A|B]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 2 \\ 3 & 1 & 4 & : & 3 \\ 2 & 3 & 5 & : & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 2 \\ 3 & 1 & 4 & : & 3 \\ 2 & 3 & 5 & : & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & : & 0 \\ 2 & 3 & 5 & : & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & : & 0 \\ 0 & 2 & 2 & : & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)F_1+F_2 \rightarrow F_2 \quad (-1)F_1+F_3 \rightarrow F_3 \quad (4)F_2+F_3 \rightarrow F_3$$

Se determina su rango y se obtiene que en la última matriz no hay ninguna fila nula, por lo tanto, $rg[A|B]=3$

Por (a) y (b) se sabe que los rangos de A y $[A|B]$ son distintos, por el teorema de Rouché-Frobenius, se concluye que el sistema es **incompatible**. El SEL no tiene solución.

Ejemplo 3:
$$\begin{cases} x & +2y & +z & = & 3 \\ 2x & +5y & +2z & = & 7 \\ x & +3y & +z & = & 4 \end{cases}$$

(a) La matriz de coeficientes del SEL es $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Se calcula el $rg(A)$ mediante la calculadora online que se puede hallar en el link: <https://matrixcalc.org/es/>. Y se obtiene que $rg(A)=2$

(b) La matriz ampliada del sistema es $[A|B]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 5 & 2 & : & 7 \\ 1 & 3 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 5 & 2 & : & 7 \\ 1 & 3 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 1 & 3 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-2)F_1+F_2 \rightarrow F_2 \quad (-1)F_1+F_3 \rightarrow F_3 \quad (-1)F_2+F_3 \rightarrow F_3$$

Se determina su rango y se obtiene que en la última matriz **hay una fila nula**, por lo tanto, $rg[A|B]=2$

Por (a) y (b), $rg(A)=rg[A|B]=2$ pero 2 es menor que 3 que es la cantidad de incógnitas del SEL. Por lo tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible indeterminado**.

De hecho, si se resuelve el SEL su conjunto solución resulta: $S = \{(I-t; I; t) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

Les compartimos un video para pensar sobre el mundo de las matemáticas y el Teorema de R-F :

<https://youtu.be/JnutYsGpKIE>



GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS N°4
Determinante y rango de una matriz. Teorema de Roché- Frobenius

1. Calcule el rango de las siguientes matrices mediante el método de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} (-2) & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & (-5) \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. En cada caso, determine si es posible, $a \in \mathbb{R}$ para que el rango de cada matriz sea el indicado:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$rg(A) = 2$$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 & 6 \\ a & -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$rg(B) = 1$$

3. Estudie el rango de la matriz A en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Calcule la matriz adjunta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

5. Calcule, si existe, la matriz inversa de las matrices del **ejercicio 4** mediante el método de la adjunción.

6. Halle el valor del determinante de las matrices del **ejercicio 1**, en las que sea posible, mediante el método de Gauss

7. Resuelva los siguientes enunciados mediante propiedades:

a) Si se sabe que $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\det(B) = -5$. Calcule $\det(2.B')$

b) Si se sabe que $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\det(A^{-1}) = 3$. Calcule $2.\det(A)$

c) Si se sabe que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{bmatrix} = 2$. Calcule el $\det \begin{bmatrix} (a+2b) & c & b \\ (d+2e) & f & e \\ (g+2h) & m & h \end{bmatrix}$

8. Despeje, si es posible, la matriz X , sabiendo que las matrices A, B y $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son regulares. En caso, de no ser factible, justifique su respuesta:

- | | | | |
|-------------------|----------------|-----------------|----------------------|
| a) $A.X=B$ | b) $X.A=B$ | c) $A.X+B=C$ | d) $A^{-1}.X.A=B+2C$ |
| e) $(A+2B).X=C-B$ | f) $X.A=X.B+C$ | g) $A.X+2X=C+D$ | h) $X.A+3X=C$ |

9. Determine la clasificación según su conjunto solución de los siguientes SEL, utilizando como justificación el Teorema de Rouché- Frobenius:

$$a) \begin{cases} x & +y & +z & = 6 \\ -2x & +3y & -z & = -4 \\ -x & -y & +2z & = 3 \\ x & +2y & -3z & = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x & & +z & +2w & = 1 \\ -x & +y & -z & -w & = 2 \\ 2x & -3y & & +w & = -1 \\ & 2y & +z & -w & = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x & +2y & +z & = 0 \\ 2x & +5y & +2z & = 0 \\ -4x & -8y & -4z & = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x & -4y & +z & = 1 \\ -x & +2y & -z & = 3 \\ x & +3y & -z & = 7 \\ x & -2y & +z & = 0 \end{cases}$$