

# Unidad N<sup>ro</sup> 1

---

## ÁLBEBRA VECTORIAL

¿Qué hora es?



3:10 pm

¿Cuál es el desplazamiento de una hormiga?



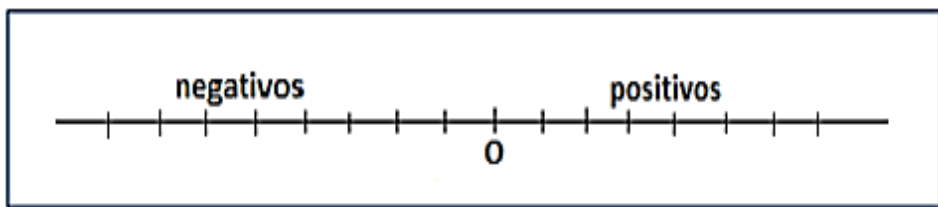
- ¿Desde dónde?
- ¿En qué dirección?
- ¿En qué sentido?
- ¿Hasta dónde?

a) ¿Cuáles son los elementos que determinan un **sistema de coordenadas**?

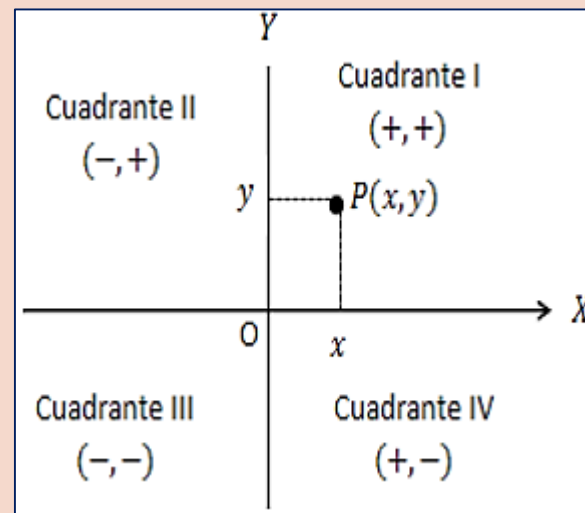
*Los elementos que determinan un **sistema de coordenadas** es un conjunto de valores y puntos que permiten definir **unívocamente** la posición de cualquier punto de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$*

*(En esta unidad trabajaremos con **sistemas de coordenadas rectangulares o cartesianas**)*

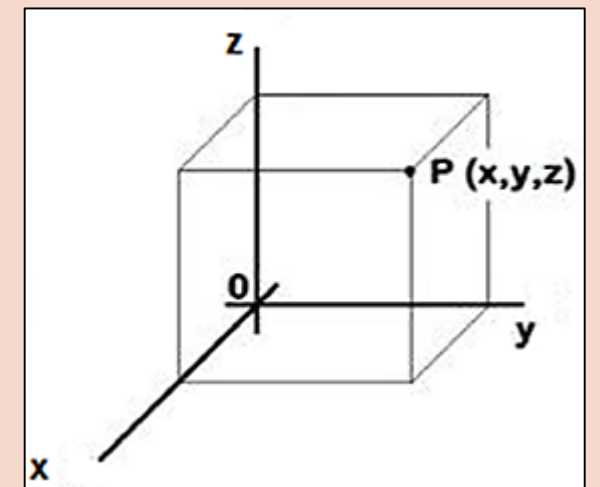
$\mathbb{R}$



$\mathbb{R}^2$

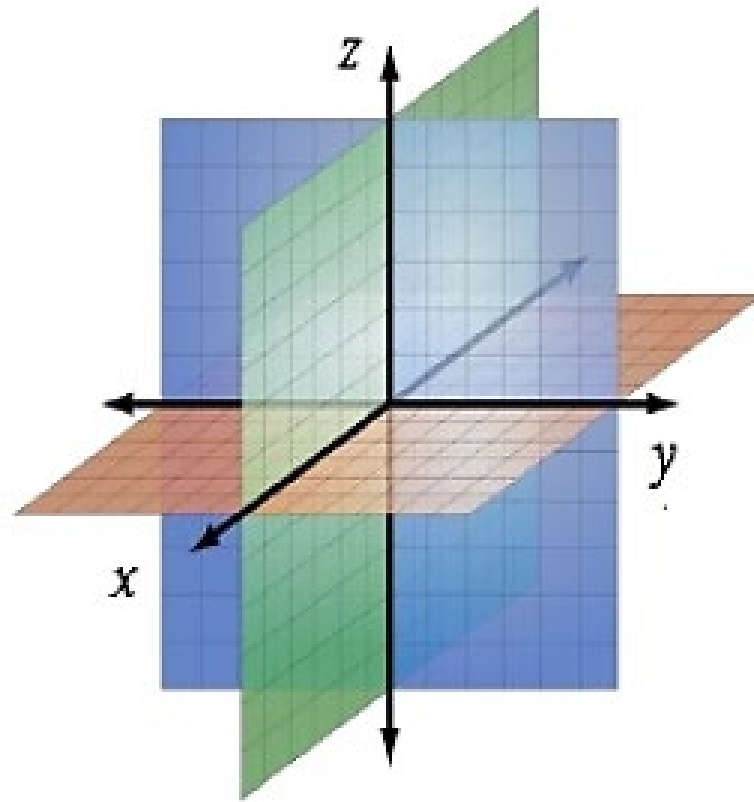


$\mathbb{R}^3$



## Sistemas de coordenadas rectangulares en $\mathbb{R}^3$ (divide al espacio en octantes)

---



---

b) ¿Cuál es la diferencia entre **magnitudes escalares** y **vectoriales**?

Las **magnitudes escalares** son aquéllas que quedan completamente determinadas mediante el conocimiento de su valor expresado mediante una cantidad (un número real) seguida de una unidad (a excepción de las adimensionales). Ejemplos de magnitudes escalares son:

Tiempo ( $t$ ) ; Masa ( $m$ ) ; Temperatura ( $T$ ) ; etc

Las **magnitudes vectoriales** son aquéllas que no quedan completamente determinadas por su valor (cantidad y unidad), sino que requieren además el conocimiento de la dirección y el sentido de su actuación y su punto de aplicación. Entre las magnitudes vectoriales están:

Velocidad ( $\vec{v}$ ) ; Aceleración ( $\vec{a}$ ) ; Fuerza ( $\vec{F}$ ) ; etc

c) ¿Cuáles son los elementos característicos de un vector?

***Norma:*** longitud del segmento

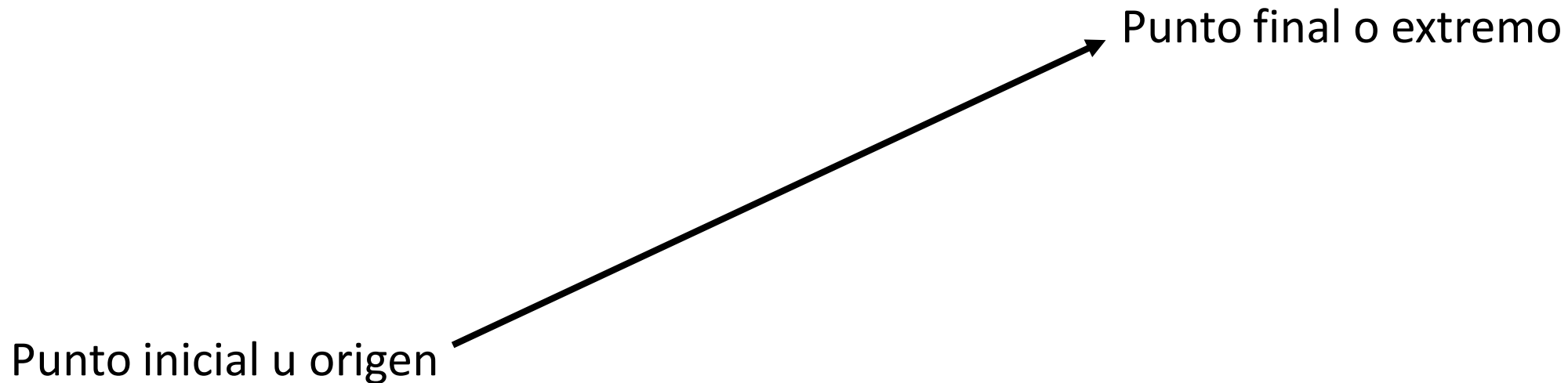
***Dirección:*** la misma que tiene la recta que contiene al segmento

***Sentido:*** orientación

---

d) ¿Qué gráfica se usa para representar un vector?

*Un segmento de recta orientado*



---

e) ¿Cuál es la información suficiente y necesaria para determinar un vector?

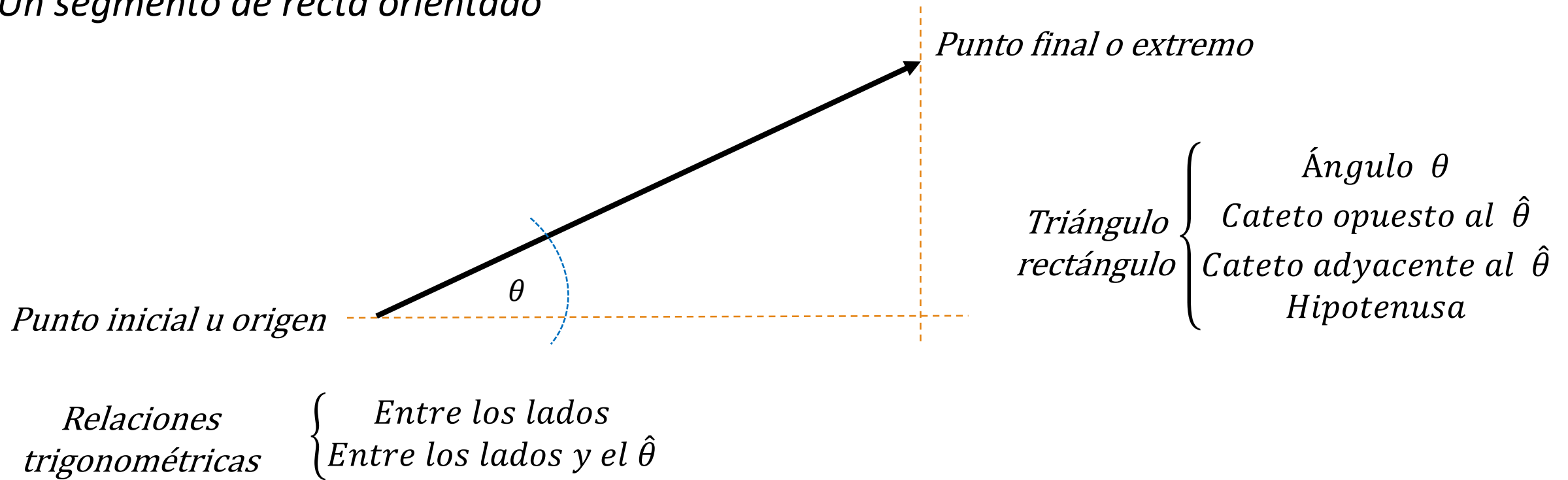
*Un punto de inicial u origen y un punto final o extremo.*

*¿Por qué?*

*Porque permiten determinar los elementos que caracterizan a un vector: **Norma\***, **Dirección**, **Sentido**.*

\* En algunos textos suelen llama a la norma con los términos de módulo o longitud.

*Un segmento de recta orientado*

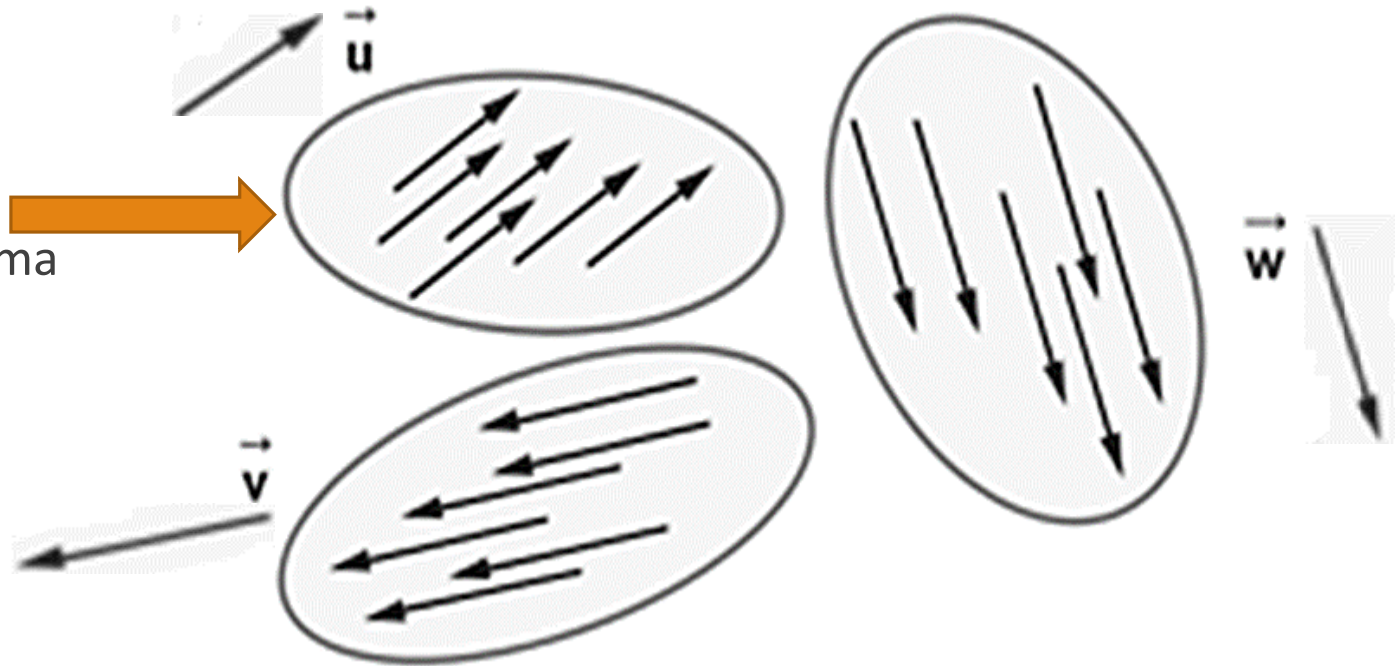




**f) ¿Qué es un **vector libre**?**

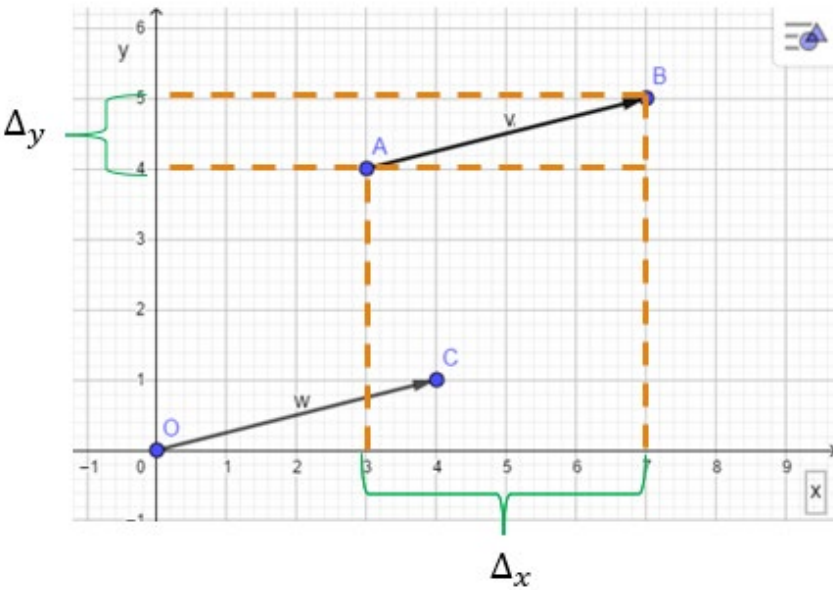
*De cada conjunto extraemos un representante*

Los vectores de cada conjunto  
Tienen la misma dirección, sentido y norma  
Es decir, son **equipolentes**



Ejemplo:

- a) Dibuja en un sistema de coordenadas rectangulares ( $\mathbb{R}^2$ ) el vector cuyo punto inicial u origen es A(3;4) y punto extremos B(5;7)
- b) Determina las coordenadas del vector AB
- c) Calcula su dirección, norma y sentido



Dirección de  $\overrightarrow{AB} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{(5-4)}{(7-3)}$  (es la misma de la recta que contiene el vector)

Norma de  $\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (5-4)^2}$

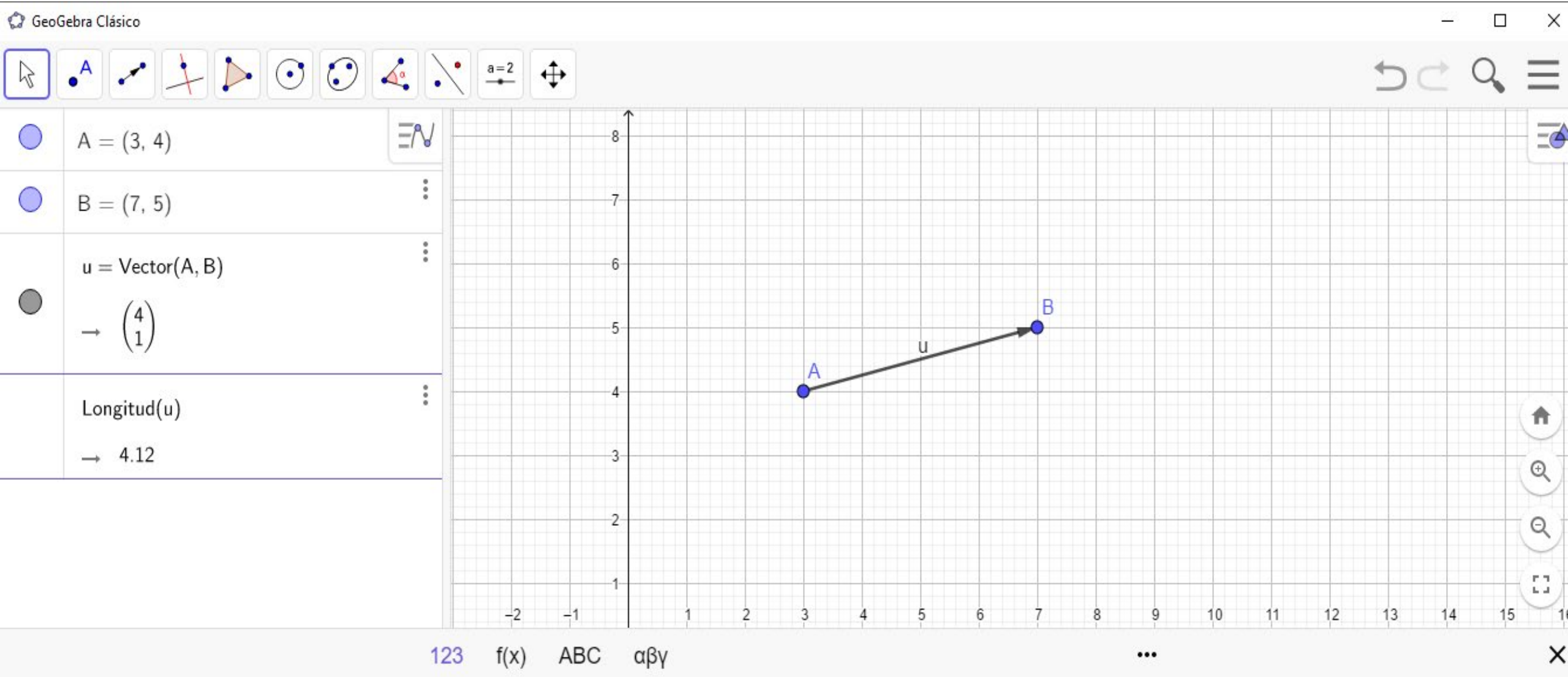
Sentido: Desde A hacia B

**Tal vez este link te ayude con los cálculos:**

<http://es.onlinemschool.com/math/assistance/vector/>

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (\Delta_x; \Delta_y) \\ &= (7-3; 5-4) \\ &= (4; 1)\end{aligned}$$

Con GeoGebra



## Algunos vectores particulares

---

**Vector nulo:** Es aquel vector que no tiene dirección ni sentido y su norma es 0.

**Vector unitario o versor:** Es aquel vector cuya norma es 1.

**Vector canónico:** Es aquel vector unitario tal que una y sólo una de sus coordenadas es 1 y las restantes son 0.

**Ejemplos:** En  $\mathbb{R}^2$  :  $\check{i} = (1;0)$  y  $\check{j} = (0;1)$

En  $\mathbb{R}^3$  :  $\check{i} = (1;0;0)$  ,  $\check{j} = (0;1;0)$  y  $\check{k} = (0;0;1)$

## Operaciones con vectores

---

### ➤ Multiplicación entre un número real y un vector

Sean el vector de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$  y  $k \in \mathbb{R}$ , se define:

$$k\vec{u} = (ku_1; ku_2; \dots; ku_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ejemplo:

**Algunos casos particulares**

Sea  $\vec{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$  :

Si  $k=1 \rightarrow k\vec{u} = \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

---

Si  $k=(-1) \rightarrow k\vec{u} = -\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  vector opuesto de  $\vec{u}$

Si  $|k| < 1 \wedge k \neq 0 \rightarrow |k\vec{u}| < |\vec{u}|$

Si  $|k| > 1 \wedge k \neq 0 \rightarrow |k\vec{u}| > |\vec{u}|$

Si  $k=0 \rightarrow k\vec{u} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$  vector nulo

**Condición de paralelismo entre vectores:** Dos vectores no nulos son ***paralelos*** cuando uno es combinación lineal de otro con  $k \neq 0$ . Simbólicamente:

$$\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \quad (" \vec{u} \text{ es una } \textbf{combinación lineal} \text{ de } \vec{v} ")$$

❖ Se convendrá que el *vector nulo* es paralelo a cualquier otro vector

### ➤ Adición entre vectores

Sean los vectores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , se define el vector suma:

---

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Sustracción entre vectores no se trata de una nueva operación sino de un cálculo obtenido a partir de las operación de multiplicación por un numero real y adición entre vectores ya que:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

**Nota:** Los vectores también pueden ser denotados como matrices del tipo **1xn** o **nx1**

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv \vec{u} = [u_1 \quad \cdots \quad u_n] \equiv \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

## Combinación lineal de vectores

---

Si A es un conjunto finito de números reales y B es un conjunto finitos de vectores, ambos conjuntos con k elementos se tiene la expresión:

$$\mathbf{a}_1 \overrightarrow{v_1} + \mathbf{a}_2 \overrightarrow{v_2} + \dots + \mathbf{a}_k \overrightarrow{v_k}$$

donde los elemntos que pertenecen a A reciben el nombre de coeficientes de la CL.

**Observación:** si  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$  la *combinación lineal* se denomina **TRIVIAL**



## Dependencia e independencia lineal de vectores

---

Se dice que un conjunto finito de vectores  $V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  es *linealmente dependiente* si el elemento neutro se puede escribir como *combinación lineal* de ellos con no todos los coeficientes nulos. Es decir, si existen escalares  $a_1, \dots, a_k$  no todos nulos tales que:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Por el contrario, si  $V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  no es *linealmente dependiente*, se dice que es un conjunto *linealmente independiente*.

Es decir, si  $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$  ( Combinación lineal TRIVIAL)

---

## Operación de producto escalar entre vectores. Algunas aplicaciones

Sean los vectores en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$   $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  se define producto escalar que se denota  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  como la sumatoria de los productos entre las coordenadas rectangulares de uno y otro vector. De modo que  $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$

**Ejemplo:**  $\vec{a} = (1; 2; -1)$  y  $\vec{b} = (0; -1; -4)$  entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) = 2$$

---

Geoméricamente, el producto escalar es útil para encontrar la dirección entre vectores en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Ya que otra expresión del producto escalar puede ser:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\hat{\theta})$$

Puesto que las normas de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  se pueden calcular a partir de sus componentes. Entonces, se puede calcular el coseno del  $\hat{\theta}$  y determinar el ángulo entre ambos vectores.

$$\cos \hat{\theta} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \quad \text{con } 0 \leq \hat{\theta} \leq \pi$$

**Condición de perpendicularidad entre vectores:** Dos vectores no nulos son *ortogonales* (perpendiculares) cuando su producto escalar es 0.

Simbólicamente:  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

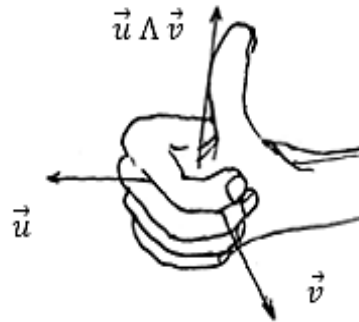
## Producto vectorial

El producto vectorial entre vectores de  $\mathbb{R}^3$ , se denota  $\vec{u} \times \vec{v}$  que resulta otro vector ortogonal a ambos. Dado que el resultado es otro vector, se define su norma, dirección y sentido.

-Su *norma* se calcula como el producto de las normas de los vectores multiplicado por el seno del ángulo  $\hat{\theta}$  que ambos determinan, es decir,  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\hat{\theta})$

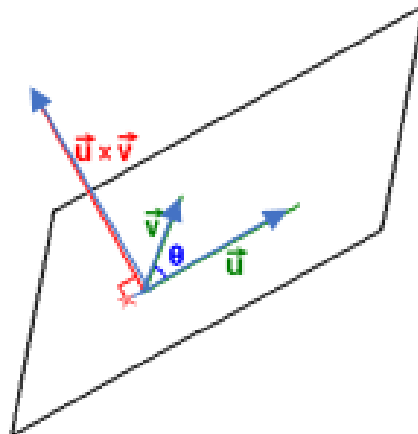
-La *dirección* es la misma que posee la recta ortogonal a ambos vectores, es decir que forma  $\frac{\pi}{2}$  con los mismos.

-Para determina el *sentido* de vector  $\vec{u} \times \vec{v}$  se utiliza la denominada regla de la mano derecha:



El cálculo de  $\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  consiste en desarrollar el siguiente procedimiento:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2)\vec{i} - (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1)\vec{j} + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)\vec{k}}_{\vec{u} \wedge \vec{v} \text{ como combinación lineal de los versores } \vec{i}, \vec{j} \text{ y } \vec{k}}$$



## Producto mixto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$

Sen  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  se define producto mixto como  $\vec{u}(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v}(\vec{w} \times \vec{u}) \in \mathbb{R}$

Una interpretación geométrica de este producto es el volumen ( $V$ ) del *paralelepípedo* cuyas aristas se generan a partir de los tres vectores, siendo  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  los vectores que determinan la base del cuerpo y  $\vec{v} \times \vec{w}$  un vector que tiene la misma dirección que la altura del paralelepípedo respecto con la base considerada.

$$V = \text{Superficie de la base} \cdot \text{altura} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

