

UNIDAD N° 6: **AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ CUADRADA.**
DIAGONALIZACIÓN. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, (vector como una matriz de $n \times 1$)

¿Bajo qué condiciones $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$?

¿Podremos determinar, para una cierta matriz A , qué vectores $\vec{v}$ y qué valores de λ cumplen lo que pedimos?

Esos valores λ se denominan **autovalores** de la matriz A . Los $\vec{v}$ se llaman **autovectores** de la matriz A .

Exigiremos que $\vec{v} \neq \vec{0}$. En el desarrollo veremos por qué.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot I \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

¿Por qué esta última expresión representa un SELH?

Para que tenga solución y no sea sólo la trivial, ya que exigimos que $\vec{v} \neq \vec{0}$, el SELH debe ser compatible indeterminado.

Para ello, el determinante de la matriz de los coeficientes de SEL deberá anularse:

$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ ¿Por qué 0 y no $\vec{0}$?

La expresión que logremos de $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$ se llama **polinomio característico** de A , o asociado a tal matriz, y la ecuación $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ se llama **ecuación característica** de A . Resolverla significa encontrar el o los valores de λ que la satisfagan y, dependiendo de ellos, determinaremos los respectivos autovectores $\vec{v} \cdot t$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Ahora calcularemos su determinante, es decir $P(\lambda)$:

$$\det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 3 \cdot 2 = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 6 \\ \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Igualemos $P(\lambda)$ a cero para obtener la ecuación característica, calcular sus raíces y conseguir los autovalores de A :

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Hallaremos entonces que $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 6$

Con $\lambda_1 = 1$:

$$\text{Como } (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-1 & 2 \\ 3 & 3-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{De donde } x_2 = \frac{-3}{2} x_1$$

El conjunto solución del SEL es

$$S = \left\{ (x_1; \frac{-3}{2} x_1) \right\} \text{ o mejor } S = \left\{ (t; \frac{-3}{2} t) \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

¿Por qué $t \neq 0$?

Si le asignamos un valor arbitrario al parámetro t , por ejemplo, para $t = 2$ el autovector correspondiente será

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

el cual, a su vez, generará un conjunto de autovectores, múltiplos escalares del mismo, lo que equivale a decir, paralelos a este vector.

Una manera de escribirlo podría ser

$$E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} - \{ \vec{0} \}$$

Con $\lambda_2 = 6$:

$$\text{Como } (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-6 & 2 \\ 3 & 3-6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{De donde } x_2 = x_1$$

El conjunto solución del SEL es

$$S = \{ (x_1; x_1) \} \text{ o mejor } S = \{ (t; t) \} \text{ con } t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

¿Por qué $t \neq 0$?

Si le asignamos un valor arbitrario al parámetro t , por ejemplo, $t = 1$, el autovector correspondiente será

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el cual, a su vez, generará un conjunto de autovectores, múltiplos escalares del mismo, lo que equivale a decir, paralelos a este vector.

Una manera de escribirlo podría ser

$$E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} - \{ \vec{0} \}$$

El conjunto $\sigma(A)$ se llama espectro de la matriz.

$$\sigma(A) = \{1; 6\}$$

El conjunto de autovectores $V = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ **siempre deberá ser LI**. Observemos que hemos exigido que $\vec{v} \neq \vec{0}$, si esto pudiera ocurrir, V sería LD.

Ahora puede ver los siguientes videos:



<https://youtu.be/GHPOEhUkHPU>



https://youtu.be/KH_Zu2CUrtQ

Propiedades:

Sea λ un autovalor de A asociado al autovector $\vec{v}$ y α un escalar, entonces:

- $\alpha \cdot \lambda$ es un autovalor de $\alpha \cdot A$ con autovector $\vec{v}$.
- Si A es regular, entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} con autovector $\vec{v}$.
- A es regular, si y sólo si ninguno de sus autovalores es cero.
- A es singular, si y sólo si existe un autovalor cero.
- λ^k es autovalor de A^k con autovector $\vec{v}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
- λ es autovalor de A^t (A y A^t tienen los mismos autovalores).
- Si A es triangular, sus autovalores son los elementos de la diagonal principal.
- Si A es simétrica ($A = A^t$), con elementos reales, entonces sus autovalores son números reales y los autovectores (asociados a diferentes autovalores) son ortogonales.

Multiplicidad de un autovalor: Sea λ_0 un autovalor de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denominaremos:

- **Multiplicidad algebraica de λ_0** a su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A y se denota $ma(\lambda_0)$.
- **Multiplicidad geométrica de λ_0** a la cantidad de autovectores LI, asociados a cada autovalor λ_0 y se denota $mg(\lambda_0)$.

Para cada autovalor de A se cumple la relación $1 \leq mg(\lambda_0) \leq ma(\lambda_0)$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

Tiene un solo autovalor $\lambda_1 = -1$ (triple) el cual tendrá $ma(\lambda_1) = 3$

Al resolver el SEL:

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendremos el conjunto solución $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}t; -3t; t \right) \right\}$ con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} - \{ \vec{0} \} \text{ entonces } mg(\lambda_1) = 1$$

Ejemplo: Sea $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$

Tiene un solo autovalor $\lambda_1 = -1$ (triple) el cual tendrá $ma(\lambda_1) = 3$

Al resolver el SEL:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene el conjunto solución $S = \{(x; -3z; z)\}$ con $x, z \in \mathbb{R} - \{0\}$

O mejor $S = \{(t_1; -3t_2; t_2)\}$ con $t_1; t_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ -3t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{-1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} - \{ \vec{0} \} \text{ entonces } mg(\lambda_1) = 2$$

MATRICES SEMEJANTES (O EQUIVALENTES)

Si existe $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, regular, tal que $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$, decimos que A y B son semejantes.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow C \cdot B = A \cdot C, \text{ con } \det(C) = 1 \neq 0$$

Propiedad:

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son semejantes, A y B tienen la misma ecuación característica y los mismos valores característicos.

¿Tienen los mismos autovectores?

Podemos verificarlo para las matrices A y B del ejemplo.

La demostración de esta propiedad, la tenemos aquí:

<https://youtu.be/VBYOIN09Uy4>



MATRICES DIAGONALIZABLES

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable si existe D (matriz diagonal), tal que A y D sean equivalentes, es decir $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$.

¿Cómo podemos saber que una matriz es diagonalizable?

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable si y solo si el conjunto V de autovectores contiene precisamente n vectores.

Dicho de otra manera, $m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0)$.

Propondremos lo siguiente:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ donde los } \lambda_i \text{ son los autovalores de } A.$$

C es una matriz en la cual se ocupan las columnas con los respectivos autovectores de la matriz A .

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 1; m_a(\lambda_1) = 1; E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}, m_g(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 6; m_a(\lambda_2) = 1; E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, m_g(\lambda_2) = 1$$

Entonces A es diagonalizable. Así que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos verificarlo:

$$D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow C \cdot D = A \cdot C, \text{ con } \det(C) = 5 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ no es diagonalizable. ¿Por qué?

https://youtu.be/kY3-RJT0x_0



Propiedades:

i) Como $D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow \det(D) = \det(C^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(C) \Rightarrow \det(D) = \det(A)$

ii) Potencia de una matriz diagonalizable:

Si $k \in \mathbb{N}$, como $D = C^{-1} \cdot A \cdot C \Rightarrow C \cdot D \cdot C^{-1} = A \Rightarrow (C \cdot D \cdot C^{-1})^k = (A)^k \Rightarrow (A)^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$.

En el video podremos ver un ejemplo:

<https://youtu.be/kNLGRdhocmc>



GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS N° 6 (1ra. Parte)
Autovalores y autovectores de una matriz cuadrada. Diagonalización

1. Halle el polinomio característico, los autovalores y respectivos autovectores para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Pruebe que A^t tiene los mismos autovalores que A (Recuerde una propiedad en el mismo sentido de los determinantes).
3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B = P^{-1} A P$ pruebe que el polinomio característico de A es igual al de B .

4. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- a) Pruebe que ambas matrices tienen los mismos autovalores.
 b) Determine si A y B son semejantes. Justifique.

5. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ halle $k \in \mathbb{R}$ para que $\lambda = 1$ sea autovalor de A .

6. Pruebe que si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene como autovalor a $\lambda = 0$ entonces, A no es invertible.

7. Para cada una de las matrices del ejercicio 1, determine si son diagonalizables. En caso afirmativo halle una base de autovectores, la matriz diagonal y la matriz invertible P tal que $D = P^{-1} A P$.

8. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & b \end{bmatrix}$

- a) Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio característico de A sea $P(A) = \lambda^2 + 3\lambda - 13$.
 b) Para $a = 0$, ¿existe algún valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz A sea diagonalizable?

9. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$, halle todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A resulte diagonalizable.

10. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, utilizando el concepto de matriz diagonal, halle A^{32} .

11. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -24 & 12 \end{bmatrix}$$

- Analice si cada una de ellas es invertible.
 - Analice si cada una de ellas es diagonalizable.
 - En base a lo obtenido en a) y b), ¿Cuál es su conclusión?
- 12.** Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que 2, 3, y -4 son autovalores de A :
- ¿ A es diagonalizable?
 - ¿ A es invertible? Justifique
- 13.** Pruebe que si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable entonces $\det(A) = \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \dots \lambda_n$ siendo λ_j los autovalores de A .
- 14.** Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene los siguientes valores propios: 1 y 2 (doble) y los respectivos $E_{\lambda_1} = \{(1; 1; 1)\}$ y $E_{\lambda_2} = \{(-1; 2; 3)\}$. Determine si A es diagonalizable. Justifique.
- 15.** Si $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tiene los siguientes valores propios: -1 (triple) y 4 (simple) y los respectivos $E_{\lambda_1} = \{(1; 1; 1; 1), (1; 0; 2; 1), (0; 1; -1; 0)\}$ y $E_{\lambda_2} = \{(1; 2; 3; 1)\}$. Determine si A es diagonalizable. Justifique.

Calculemos los autovalores y autovectores de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda.I = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Ahora calcularemos su determinante, es decir

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \cdot (-5) = \\ &= -3 - 3\lambda + 1\lambda + \lambda^2 + 5 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{aligned}$$

De donde la ecuación característica será $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$$\text{Observaremos que } \lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{R}$$

¿ A no tiene autovalores? Sí, los tiene, pero en un campo numérico por fuera de los reales.

Hasta el momento no habíamos tenido este problema. Veremos cómo resolverlo, conociendo un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números complejos.

Si bien los números complejos se conocen desde la antigüedad, recién han cobrado relevancia a partir de su utilización en la solución de los problemas que los avances tecnológicos y científicos le fueron planteando a la matemática. El conjunto de los números reales no es suficiente para resolver una gran variedad de tales problemas; por ejemplo, problemas en los que interviene una ecuación de segundo grado con coeficientes reales $ax^2 + bx + c = 0$ cuyo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es negativo. Tal es el caso de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ que no tiene solución en el conjunto de los números reales, pero en el conjunto de los números complejos sus raíces son $x_{1,2} = \pm i$. Otro ejemplo muy frecuente se presenta en la resolución de circuitos eléctricos en corriente alterna; estos requieren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes e incógnitas complejas.

Como veremos en esta unidad, el conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos. Es decir, el conjunto de los números complejos es una extensión del conjunto de los números reales.

En el siguiente video, podemos ver el origen del problema:

<https://youtu.be/LqyBrrgmlro>



Definición: Llamaremos conjunto de números complejos, y lo denotaremos $\mathbb{C}$, al conjunto de pares ordenados de números reales,

$$\mathbb{C} = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde las operaciones de suma y producto se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

UNIDAD IMAGINARIA Y FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Para todo $z \in \mathbb{C}$, por definición de suma y producto tenemos que:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Si llamamos i al complejo $(0, 1)$ resulta que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ y como al conjunto de los números reales, incluido en el conjunto de los números complejos, lo identificaremos por tener cero en la segunda componente, podemos escribir:

$$z = (a, b) = \underbrace{(a, 0)}_a + \underbrace{(b, 0)}_b \cdot \underbrace{(0, 1)}_i = a + bi \quad \text{con} \quad i^2 = (-1, 0) = -1$$

Tenemos ahora una nueva forma de definir al conjunto de los números complejos como:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde $i^2 = -1$

La expresión $z = a + bi$ se conoce como **forma binómica** de un número complejo, donde:

- a es la *parte real* de z , y se denota: $Re(z) = a$
- b es la *parte imaginaria* de z , y se denota: $Im(z) = b$
- i es la **unidad imaginaria**, tal que $i^2 = -1$.

Los números complejos de la forma $a + 0i = a$ son los **números reales**, que podemos definir de la siguiente manera:

$$\mathbb{R} = \{a + bi \in \mathbb{C} / b = 0\}$$

Análogamente, a los números complejos de la forma $0 + bi = bi$ los llamaremos **imaginarios puros** y podemos definirlos:

$$\mathbb{I} = \{a + bi \in \mathbb{C} / a = 0\}$$

Plano Complejo: Los números complejos se pueden representar gráficamente como un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, también llamado **plano complejo** (Figura 1) o diagrama de Argand. Se denomina *eje real* **Re** al eje de abscisas y *eje imaginario* **Im** al eje de ordenadas:

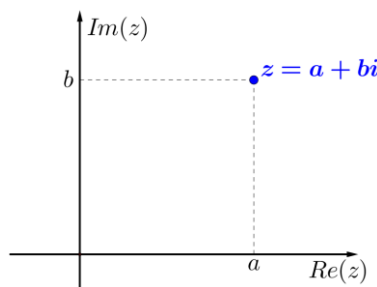


Figura 1

En el eje horizontal representaremos la parte real del complejo y en el eje vertical, la parte imaginaria.

Igualdad de complejos: Dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria:

$$z = w \Leftrightarrow Re(z) = Re(w) \wedge Im(z) = Im(w)$$

Es decir:

$$z = w \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

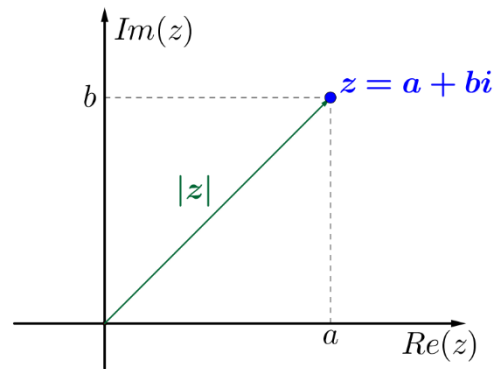
Conjugado de un número complejo: El conjugado del complejo z , que se denota $\bar{z}$, es el número complejo $\bar{z} = a - bi$. Gráficamente el conjugado de un número complejo es la reflexión de este, respecto del eje real.

Opuesto de un número complejo: El opuesto del complejo z es el número complejo, que se denota $-z$, es el número complejo $-z = -a - bi$. Gráficamente el opuesto de un número complejo es la reflexión de este, respecto del origen 0.

Módulo de un número complejo: El módulo del complejo z , que se denota $|z|$, es el número real no negativo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Gráficamente el módulo de un complejo es la distancia de este al origen 0. Note que i (unidad imaginaria) **NO INTERVIENE** en el cálculo del módulo.



En el conjunto de los números complejos no existe relación de orden, como ocurre en el conjunto de los números reales. Es decir, si comparamos dos números complejos z y w , sólo podemos concluir que son iguales $z = w$ o distintos $z \neq w$.

Adición de números complejos en forma binómica: Sea los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ definimos:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicación de números complejos en forma binómica: Sea los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ definimos:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd \underbrace{i^2}_{-1} = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

División de números complejos en forma binómica: Sean $z = a + bi$, $w = c + di$ tal que $w \neq 0$, se define la división $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di}$. Para efectuar la división se multiplica y divide esta expresión por $\bar{w}$, el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

No es conveniente memorizar esta última expresión, se recomienda realizar las operaciones indicadas paso a paso.

Ejemplo: Si $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

observe que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Propiedades: Sean $z, w, u \in \mathbb{C}$:

- | | |
|---|--|
| 1. Conmutativa de la suma:
$z + w = w + z$ | 11. Resta del conjugado:
$z - \bar{z} = 2Im(z)$ |
| 2. Asociativa de la suma:
$z + (w + u) = (z + w) + u$ | 12. Opuesto del opuesto:
$-(-z) = z$ |
| 3. Conmutativa del producto:
$z \cdot w = w \cdot z$ | 13. Opuesto del conjugado:
$-\bar{z} = \overline{(-z)}$ |
| 4. Asociativa del producto:
$z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$ | 14. Conjugado del opuesto:
$\overline{(-z)} = -\bar{z}$ |
| 5. Distributiva del producto:
$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$ | 15. Módulo del cero:
$z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ |
| 6. Conjugado del conjugado:
$\overline{\bar{z}} = z$ | 16. Módulo del producto:
$ z \cdot w = z \cdot w $ |
| 7. Conjugado de la suma:
$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ | 17. Módulo del conjugado:
$ z = \bar{z} $ |
| 8. Conjugado del producto:
$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ | 18. Módulo del opuesto:
$ z = -z $ |
| 9. Conjugado del recíproco:
Si $w \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$ | 19. Módulo del recíproco:
Si $z \neq 0$, $ z^{-1} = z ^{-1}$ |
| 10. Suma del conjugado:
$z + \bar{z} = 2Re(z)$ | 20. Módulo del cociente:
Si $w \neq 0$, $\left \frac{z}{w} \right = \frac{ z }{ w }$ |

A modo de ejercitación adicional, demostrar las propiedades anteriores.

Teníamos un problema pendiente, calcular los autovalores y autovectores de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Habíamos encontrado la ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, de donde

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Tenemos ahora todos los conocimientos para encontrar los autovalores:

Hallaremos entonces que $\lambda_1 = 1 + i$; $\lambda_2 = 1 - i$

Con $\lambda_1 = 1 + i$

$$\text{Como } (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2-i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + (-2-i)x_2 = 0 \end{cases}$$

De donde $x_1 = (2+i)x_2$

El conjunto solución del SEL es

$$S = \{((2+i)x_2; x_2)\} \text{ o mejor } S = \{((2+i)t; t)\} \text{ con } t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si le asignamos un valor arbitrario al parámetro t , por ejemplo, para $t = 1$ el autovector correspondiente será

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

el cual, a su vez, generará un conjunto de autovectores, múltiplos escalares del mismo, lo que equivale a decir, paralelos a este vector.

Una manera de escribirlo podría ser

$$E_{1+i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} - \{\vec{0}\}$$

Con $\lambda_1 = 1 - i$

$$\text{Como } (A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2+i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + (-2+i)x_2 = 0 \end{cases}$$

De donde $x_1 = (2-i)x_2$

El conjunto solución del SEL es

$$S = \{(2-i)x_2; x_2\} \text{ o mejor } S = \{((2-i)t; t)\} \text{ con } t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si le asignamos un valor arbitrario al parámetro t , por ejemplo, $t = 1$, el autovector correspondiente será

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

el cual, a su vez, generará un conjunto de autovectores, múltiplos escalares del mismo, lo que equivale a decir, paralelos a este vector.

Una manera de escribirlo podría ser

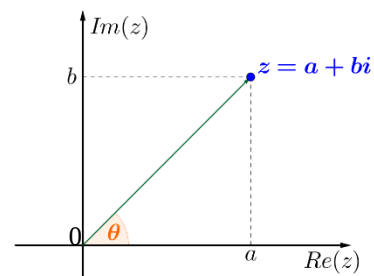
$$E_{1-i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} - \{\vec{0}\}$$

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Es la medida del ángulo comprendido entre el semieje positivo *Real* y el radio vector definido por 0 y z . Se lo denota $\theta = \arg(z)$ y puede calcularse con la expresión:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

con $a \neq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$



Note que el número complejo $z = 0 + 0i$ **NO** tiene argumento.

Cálculo del argumento: Llamaremos θ_c al ángulo que nos devuelve la calculadora al realizar: $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ (que no siempre es el ángulo buscado); y llamaremos θ al ángulo que estamos buscando. Las calculadoras sólo devuelven ángulos del primer cuadrante si el cociente $\frac{b}{a} > 0$ o del cuarto cuadrante (un valor negativo) si $\frac{b}{a} < 0$; entonces debemos INTERPRETAR la respuesta de la calculadora para hallar el argumento buscado:

- Si z está en el primer cuadrante, $a > 0 \wedge b > 0$ entonces, $\theta = \theta_c$
- Si z está en el segundo cuadrante $a < 0 \wedge b > 0$ entonces, $\theta = \theta_c + \pi$
- Si z está en el tercer cuadrante $a < 0 \wedge b < 0$ entonces, $\theta = \theta_c + \pi$
- Si z está en el cuarto cuadrante $a > 0 \wedge b < 0$ entonces, $\theta = \theta_c + 2\pi$
- Si z está sobre uno de los ejes $a = 0$ ó $b = 0$, **NO utilice calculadora.**
- Si z está sobre el eje real ($b = 0$), entonces:

$$\theta = 0 \text{ si } a > 0 \quad \text{ó} \quad \theta = \pi \text{ si } a < 0$$

- Si z está sobre el eje imaginario ($a = 0$), entonces:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \quad \text{ó} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \text{ si } b < 0$$

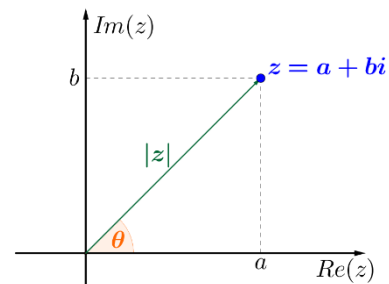
FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi$, tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ con $a \neq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

A partir del triángulo rectángulo determinado en la figura podemos deducir que:

$$a = |z| \cos \theta \quad \text{y} \quad b = |z| \sin \theta$$

de modo que al remplazar estas últimas en $z = a + bi$ se obtiene:



$$z = |z| \cos \theta + (|z| \sin \theta)i = |z| (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

denominada **forma trigonométrica o polar**: Expresada en función de su módulo y argumento.

De manera abreviada suele anotarse:

$$z = |z| \operatorname{cis} \theta$$

Ejemplo: Sea $z = 1 - i$, entonces: $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\theta_c = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$, como z se halla en el cuarto cuadrante debemos sumarle 2π a este argumento y obtenemos:

$$\theta = \theta_c + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$$

Así llegamos a la expresión de z en forma **trigonométrica o polar**:

$$z = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) \right] \quad \text{o bien} \quad z = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{7}{4}\pi\right)$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

El Análisis Matemático demuestra que desarrollando las funciones seno, coseno y exponencial mediante series de Taylor se pueden obtener las expresiones:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

Si desarrollamos las potencias del numerador de la última serie, obtenemos:

$$e^{i\theta} = e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + i\frac{\theta^9}{9!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

Pudiendo corroborar que:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Si sustituimos esta fórmula en la expresión:

$$|z| (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

obtenemos la **forma exponencial o forma de Euler**:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Este formato es sumamente eficiente para efectuar operaciones de multiplicación, división y potenciación de números complejos, ya que se aplican las reglas algebraicas ya conocidas para números reales. Y como veremos en breve, es imprescindible para definir y calcular logaritmos en este conjunto.

Multiplicación de números complejos en forma exponencial y trigonométrica:

Sean $z = |z|e^{i\theta} = |z|\operatorname{cis} \theta$ y $w = |w|e^{i\varphi} = |w|\operatorname{cis} \varphi$

$$z \cdot w = |z|e^{i\theta} \cdot |w|e^{i\varphi} = |z| \cdot |w|e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = \underbrace{|z||w|e^{i(\theta+\varphi)}}_{\text{Forma Exponencial}} = \underbrace{|z||w|\text{cis}(\theta + \varphi)}_{\text{Forma Trigonométrica}}$$

El módulo del producto es el producto de los módulos y el argumento del producto es la suma de los argumentos.

División de números complejos en forma exponencial y trigonométrica:

Sean $z = |z|e^{i\theta} = |z|\text{cis } \theta$ y $w = |w|e^{i\varphi} = |w|\text{cis } \varphi$ con $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|e^{i\theta}}{|w|e^{i\varphi}} = \underbrace{\frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}}_{\text{Forma Exponencial}} = \underbrace{\frac{|z|}{|w|}\text{cis}(\theta - \varphi)}_{\text{Forma Trigonométrica}}$$

El módulo del cociente es el cociente de los módulos y el argumento del cociente es la diferencia de los argumentos.

Puede ocurrir que la suma o la diferencia de dichos argumentos dé como resultado un valor fuera del intervalo $[0; 2\pi)$, esto se corrige restando o sumando, según corresponda, 2π al argumento obtenido.

Potenciación en forma exponencial y trigonométrica:

Para calcular z^n , con $n \in \mathbb{Z}$ se aplican las propiedades de la potenciación conocidas para números reales:

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n(e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$$

Si la escribimos en forma polar se obtiene la conocida **Fórmula de De Moivre**:

$$z^n = |z|^n \text{cis } (n\theta) = |z|^n [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen } (n\theta)]$$

Cuando el argumento hallado para z^n da como resultado un valor fuera del intervalo $[0; 2\pi)$ se suma o se resta, según corresponda, un múltiplo de 2π al argumento obtenido.



<https://youtu.be/8Dd9dXbwuDA>

Raíces n-ésimas de un número complejo en forma exponencial y trigonométrica:

La expresión en forma de par ordenado y en forma binómica de un número complejo es única, mientras que las formas trigonométrica y exponencial de un mismo complejo permiten infinitas expresiones diferentes, el caso general es:

$$z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y tal que para cada valor de k existe una expresión diferente del número z .

Veamos ahora como se obtienen las n raíces n – ésima de un numero complejo:

Definición:

Sean los números complejos $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$ y $w = |w|e^{i\varphi}$, w es una raíz n – ésima de z si y sólo si la potencia n – ésima de w es igual a z . En fórmulas:

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow w^n = z$$

De la última ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} w^n &= z \\ (|w| \cdot e^{i\varphi})^n &= |z| \cdot e^{i(\theta+2k\pi)} \\ \underbrace{|w|^n}_{Re} \cdot \underbrace{e^{in\varphi}}_{Im} &= \underbrace{|z|}_{Re} \cdot \underbrace{e^{i(\theta+2k\pi)}}_{Im} \end{aligned}$$

Al igualar parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria, obtenemos:

$$\begin{aligned} |w|^n &= |z| & \wedge & & e^{in\varphi} &= e^{i(\theta+2k\pi)} \\ |w| &= |z|^{\frac{1}{n}} & \wedge & & n\varphi &= \theta + 2k\pi \\ |w| &= |z|^{\frac{1}{n}} & \wedge & & \varphi &= \frac{\theta+2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Finalmente, todas las raíces n – ésima de z son:

$$w_k = \underbrace{|z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}}_{Forma Exponencial} = \underbrace{|z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \right]}_{Forma Trigonométrica}$$

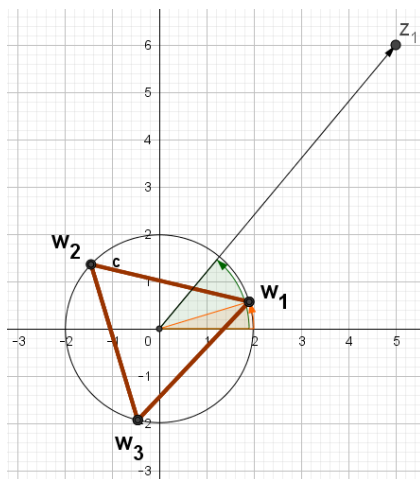
Con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

<https://youtu.be/SYsQidGuaD8>

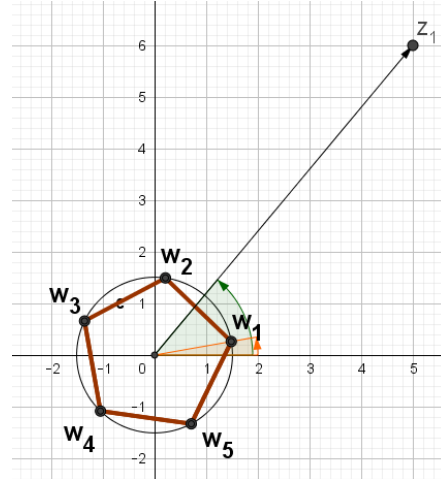


Nota:

- Existen exactamente n raíces n – ésima diferentes de z , ya que para valores de k mayores a $n-1$, se repiten las mismas raíces en forma periódica.
- Todas las raíces están dispuestas como vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen del plano complejo. Esto se debe a que los argumentos de las raíces sucesivas se incrementan en una n – ésima fracción de giro mientras k varía entre 0 y $n-1$:



Raíces cúbica de $z_1 = 5 + 6i$



Raíces quintas de $z_1 = 5 + 6i$

- $\varphi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ siendo $\frac{\theta}{n}$ y $\frac{2\pi}{n}$
Argumento de la 1ª raíz *n-ésima fracción de giro*
- La distancia del centro de dicho polígono a sus vértices es constante y está dada por $|w| = |z|^{\frac{1}{n}}$

LOGARITMO NATURAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

El logaritmo natural de un número complejo se define de modo similar al de los números reales. Sean dos números complejos $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$ y $w = a + bi$ tales que $z \neq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$. El número w es logaritmo natural de z si y sólo si el número e (base de los logaritmos naturales) elevado a la w es igual a z . En fórmulas:

$$w = \ln z \Leftrightarrow e^w = z$$

Operando la última ecuación:

$$e^w = z$$

$$e^{a+bi} = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$\underbrace{e^a}_{Re} \cdot \underbrace{e^{bi}}_{Im} = \underbrace{|z|}_{Re} \cdot \underbrace{e^{i(\theta+2k\pi)}}_{Im}$$

Igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria, obtenemos:

$$\begin{aligned} e^a &= |z| & \wedge & & e^{bi} &= e^{i(\theta+2k\pi)} \\ \ln e^a &= \ln |z| & \wedge & & b &= \theta + 2k\pi \\ a &= \ln |z| & \wedge & & b &= \theta + 2k\pi \end{aligned}$$

Finalmente, todos los logaritmos de z son:

$$w_k = \underbrace{\ln|z| + i(\theta + 2k\pi)}_{\text{Forma Binómica}}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

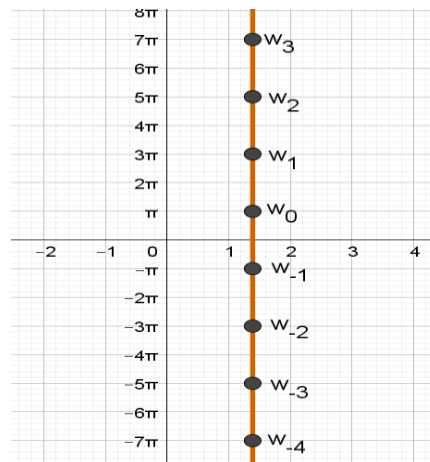
Para $k = 0$ tenemos $w_0 = \ln|z| + i\theta$ llamado **valor principal** del logaritmo natural de z . Observe que existen infinitos logaritmos naturales de z cuyas componentes reales son idénticas y están dadas por $\ln|z|$ y sus componentes imaginarias varían a intervalos constantes: $2k\pi$.

Note que ahora podemos calcular logaritmos naturales de números reales **negativos**.

Ejemplo: Sea $z = -4$, entonces, $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16} = 4$ como z se halla en el semieje real negativo resulta $\theta = \pi$.

$$w_k = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi) = \ln 4 + i(\pi + 2k\pi)$$

Con $k = 0$ obtenemos el **valor principal** del logaritmo $w_0 = \ln 4 + \pi i$



Representación gráfica de las soluciones de $\ln(-4)$

Nota:

- El logaritmo natural de un número complejo tiene infinitos resultados.
- Todos los resultados se ubican sobre una recta paralela al eje imaginario.



<https://youtu.be/TMM9282pr84>

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS N° 6 (2da parte)

16. Dados los números complejos $z = 3 + 2i$ y $w = -1 - 4i$, halle:

- a) $\frac{z+w}{w}$ b) $z \cdot w^{-1}$ c) $\frac{3z-4w}{z}$ d) $(-1; 0) \cdot w^{-2}$ e) $(0; -2) \cdot z^3$

17. Calcule las potencias de la unidad imaginaria:

- a) i^{-1} b) i^{-2} c) i^{4n} d) i^{4n+1} e) i^{4n-3} f) i^{175}

18. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

- a) $(-2 + i^{27}) \bar{z} = 3 + i$
 b) $(2 + i) \cdot (1 + i^{49}) = 2 + zi$
 c) $(z + i)^2 = (z - 2i)^2$
 d) $2z - 4\bar{z} \cdot i = (-1 + 15i)(1 + i)$
 e) $\bar{z}(z + 1) = \text{Re}(11 + 2i) + 3i$
 f) $2|z^2| + i^{480}z^2 = \bar{z}z - 1 - \text{Re}(z - 2)$

19. Calcule y represente en el plano complejo los $z \in \mathbb{C}$, tales que:

- a) $|z - 2| \leq 5$
 b) $|z - 1| + |z + 3| > 10$
 c) $|z - i| \leq \text{Im}(z + i)$
 d) $z + \bar{z} = |z|^2$
 e) $|z + i| < 4$ y $\text{Re}(z) > -2$

20. Encuentre los valores reales a y b para que:

- a) $\frac{2-(1+a)i}{1-ai}$ sea un número real.
 b) $\frac{a+2i}{3+bi} = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \cdot \text{sen } 315^\circ)$

21. Exprese:

- a) En la forma trigonométrica, el número complejo $z = -3 + 3i$
 b) En la forma binómica, el número complejo $w = 2(\cos \pi - i \text{sen } \pi)$
 c) En la forma trigonométrica, el número complejo $u = -2 - 2i$
 d) En la forma binómica, el número complejo $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \text{sen } \frac{\pi}{3}\right)$

22. Emplee la forma trigonométrica o exponencial para hallar:

- a) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$
 b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$
 c) $\frac{1}{(3-3i)^7}$

d) $\frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(-1+\sqrt{3}i)^6}$
 e) $\frac{(1+i)^{84}}{(-1-i)^9}$

23. En cada caso, encuentre y represente en el plano complejo, todas las raíces:

- a) Sextas de $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$.
 b) Quinta del número $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ y expréselas en forma exponencial.
 c) Cúbicas del número $z_4 = -1 - i\sqrt{3}$ y expréselas en forma binómica.
 d) Cuartas de $z_5 = -2 - 2i$ y represéntelas en el plano complejo.

24. Halle y represente en el plano complejo todos los números los $z \in \mathbb{C}$, tales que:

a) $\frac{50z^4 i^3}{-4+3i} = -8 - 6i$ d) $z^3 - \frac{1}{2}i^{17} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
 b) $z^4 = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8$ e) $\left(\frac{z}{1+i}\right)^3 = 1 + i$
 c) $z^2 - z^{-2} = 0$ f) $z^5 - \bar{z} = 0$

25. Halle y represente en el plano complejo los $z \in \mathbb{C}$, tales que:

a) $\ln(-e)$ b) $\ln(1-i)$ c) $\ln(-ei)$