

Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros (usando determinantes)

Veamos este ejercicio como ejemplo:

7. Utilice determinantes para indicar para que valores de $k \in \mathbb{R}$, el SEL es compatible determinado.

Para los valores de k en los que el SEL no es compatible determinado ¿cómo resulta el SEL?

$$e) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ 5x - 8y + (k^2 - 2)z = k \end{cases}$$

Antes veamos que conceptos teóricos nos permitirán justificar los pasos de la resolución:

En la página 6 del apunte hay una propiedad que expresa:

Si el determinante de la matriz de coeficientes de un SEL es 0 entonces el SEL puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Pensemos

Un SEL según su conjunto solución puede ser un:

- SCD
- SC Indeterminado
- S Incompatible

Por lo tanto, una propiedad equivalente es :

Si el determinante de la matriz de coeficientes de un SEL es DISTINTO DE 0 entonces el SEL será compatible determinado.

Ahora sabemos todo lo que necesitamos para resolver este ejercicio:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ 5x - 8y + (k^2 - 2)z = k \end{cases}$$

Entonces necesitamos conocer la matriz de coeficientes del SEL: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -8 & (k^2 - 2) \end{bmatrix}$

También debemos averiguar su determinante: $\det(A) = 7k^2 - 28$

Recordando la teoría...

Si el determinante de la matriz de coeficientes de un SEL es 0 entonces el SEL puede ser compatible indeterminado o incompatible.

O bien su equivalente,

Si el determinante de la matriz de coeficientes de un SEL DISTINTO DE 0 entonces el SEL será compatible determinado.

Ahora “juntemos las ideas” y nos preguntamos :

Para qué valores de k reales el $\det(A) = 0$?

$$\det(A) = 7k^2 - 28$$

$$0 = 7k^2 - 28 \Rightarrow \text{Si } k = 2 \text{ ó } k = (-2)$$

Entonces ya podemos sacar algunas conclusiones:

- a) Si $k = 2$ ó $k = (-2)$, **el SEL puede ser compatible indeterminado o incompatible**
- b) Si $k \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, **el SEL puede ser compatible determinado**

Ahora la GRAN pregunta que ocurre si $k = 2$ ó $k = (-2)$?

Eso se soluciona sustituyendo k en el SEL original , una vez por 2 y otra por (-2) y los resolvemos!!!!

Si $k = 2$:

$$\begin{cases} x & -3y & +z & = 1 \\ 2x & +y & -z & = -1 \\ 5x & -8y & +(2^2 - 2) & = 2 \end{cases}$$

Si $k = (-2)$:

$$\begin{cases} x & -3y & +z & = 1 \\ 2x & +y & -z & = -1 \\ 5x & -8y & +((-2)^2 - 2) & = -2 \end{cases}$$

Si $k = 2$:

La solución por el método de Gauss

Transformar la matriz aumentada del sistema en una matriz en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 5 & -8 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 5 & -8 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2 \times F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & -4 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-5)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 20 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5 \times F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 7 & -3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2 :

$$7x_2 = -3 + 3x_3$$

$$x_2 = \frac{-3}{7} + \frac{3}{7}x_3$$

- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1 :

$$x_1 = 1 + 3x_2 - x_3 = 1 + 3 \times \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{7}x_3 \right) - x_3 = \frac{-2}{7} + \frac{2}{7}x_3$$

La respuesta:

$$x_1 = \frac{-2}{7} + \frac{2}{7}x_3$$

$$x_2 = \frac{-3}{7} + \frac{3}{7}x_3$$

$$x_3 = x_3$$

Resulta un sistema compatible indeterminado!!!!

Si $k = (-2)$:

La solución por el método de Gauss

Transformar la matriz aumentada del sistema en una matriz en forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 5 & -8 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2 \times F_1 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 5 \times F_1 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 1 \times F_2 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_2 - 3x_3 = -3 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

No existe solución.

Resulta un sistema Incompatible!!!!

Volviendo a la consigna:

7. Utilice determinantes para indicar para que valores de $k \in \mathbb{R}$, el SEL es compatible determinado.

Para los valores de k en los que el SEL no es compatible determinado ¿cómo resulta el SEL?

$$e) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ 5x - 8y + (k^2 - 2)z = k \end{cases}$$

Entonces ya podemos responder:

Si $k = 2$ ó $k = (-2)$, **el SEL puede ser compatible indeterminado o incompatible**

a) El SEL puede ser compatible determinado si $k \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) El SEL no es compatible determinado si $k = 2$ ó $k = (-2)$:

* si $k = 2$, **el SEL resulta compatible indeterminado**

* si $k = (-2)$, **el SEL resulta incompatible**