

Guía de Actividades de la unidad N° 5:

SECCIONES CÓNICAS, SUPERFICIES CUÁDRICAS y SISTEMAS DE COORDENADAS

Encontrarás en esta guía enlaces a videos de YouTube que, en conjunto con lo trabajado en las clases sincrónicas, te facilitarán la resolución de los ejercicios y problemas que se encuentran a continuación de cada enlace.

<https://www.youtube.com/watch?v=iqiO7iMouQE>



1. Determine la distancia entre los puntos P y Q
 - a) P (1; 2) y Q (-3;2)
 - b) P (1;3;1) y Q (-1; -2;0)
2. Halle las coordenadas del punto medio del segmento AB: A (-2; -1;2) y B (4;5;0)
3. Dadas las siguientes expresiones, complete cuadrados:
 - a) $x^2 + x -1$
 - b) $4x^2 - 4x +1$
 - c) $4x^2 - 4x +2y^2 - 8y -15 = 2$
 - d) $4x^2 - 4x -2y^2 - 8y -9z^2 +54z - 31= 1$

<https://www.youtube.com/watch?v=20sgk6O9rK8>



4. Halle el centro y el radio de las siguientes circunferencias e indique un punto que pertenezca a cada una de ellas:
 - a) $2x^2 + 2y^2 - x = 0$
 - b) $x^2 + y^2 -8x +10y -12 = 0$
5. Halle, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que:
 - a) Uno de cuyos diámetros es el segmento de extremos (-1; 3) y (7; -1).
 - b) Pasa por los puntos (0;6), (4; -2) y (9;3)
 - c) Pasa por los puntos (-2; 2), (2; 5) y su centro pertenece a la recta de ecuación $r: 5x -2y +3 =0$.

<https://youtu.be/KSJposN6NuQ>



<https://youtu.be/PTVkUffQJys>



Archivo de GeoGebra | Ecuación de una circunferencia (dinámica) para verificar resultados

<https://www.geogebra.org/m/G32rCeDZ>



6. Encuentre las coordenadas del foco, del vértice, la ecuación de la directriz y trace la gráfica de las siguientes parábolas:

- | | | |
|------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $x^2 = 8y$ | b) $y^2 = 12x$ | c) $(y-3)^2 + 8 = 2x$ |
| d) $y^2 - 6y = 4x + 3$ | e) $2(x+3) = -y \cdot (y+5)$ | f) $6x^2 + 24x - 8y + 19 = 0$ |

7. Determine en cada caso la ecuación de la parábola si se sabe que:

- a) La directriz es $x=2$ y el foco $(4;2)$
- b) La directriz es $y=2$ y el vértice $(3; -2)$
- c) El foco es $(-2;4)$ y el vértice $(1;4)$

<https://www.youtube.com/watch?v=FwDHJoY7yXU>



Archivo de GeoGebra | Ecuación de una parábola (dinámica) para verificar resultados

<https://www.geogebra.org/m/gWhB9Bz5>



8. Determine en cada caso, las coordenadas del centro, los vértices, los focos y trace la gráfica de la elipse que tiene por ecuación:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------|
| a) $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ | b) $y^2 = 2x(1 - x)$ |
|-------------------------------------|----------------------|

9. Halle la ecuación de la elipse que tiene su centro en el origen de coordenadas y cuyos focos son los puntos $(3; 0)$ y $(-3; 0)$, además la intersección de la gráfica con el eje de abscisas es el punto $(5; 0)$.

10. Obtenga, en cada caso, la ecuación de la elipse que satisfaga las siguientes condiciones:

- a) Vértices: $(5; 0)$ y $(-5; 0)$ y focos: $(4; 0)$ y $(-4; 0)$
- b) Vértices: $(3; -3)$, $(3; 9)$, $(-7; 3)$ y $(13; 3)$

11. Determine las coordenadas de los focos, de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y trace la gráfica de las siguientes hipérbolas:

- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| a) $4x^2 - 25y^2 = 100$ | b) $3y^2 - x^2 + 4x - 6y - 13 = 0$ |
|-------------------------|------------------------------------|

<https://www.youtube.com/watch?v=xFJtHT1JWLk>



<https://www.youtube.com/watch?v=s9y4ssb7C5I>



<https://youtu.be/wl2oIZXYIO4>



Archivo de GeoGebra | Ecuación de una elipse (dinámica) para verificar resultados

<https://www.geogebra.org/m/xBg4a4YQ>



Archivo de GeoGebra | Ecuación de una hipérbola (dinámica) para verificar resultados

<https://www.geogebra.org/m/FVfg4Sz3>



12. Identifique y bosqueje las siguientes superficies cuádricas:

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| a) $z = y^2$ | b) $y^2 = 4x$ |
| c) $x^2 = 8$ | d) $x^2 + y^2 = z$ |
| e) $x^2 - y^2 - z^2 = 9$ | f) $y^2 + 5z^2 = x^2$ |
| g) $(x-2)^2 + (y-4)^2 - z^2 = 1$ | h) $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$ |
| i) $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$ | j) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$ |

<https://www.youtube.com/watch?v=MsFmYVmsoyc>



<https://www.youtube.com/watch?v=Z9iFqzHcPMk&t=22s>



Archivo de GeoGebra | Superficies cuádricas dinámicas

<https://www.geogebra.org/m/Ez5zyjwR>



13. Escriba la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y esféricas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $x^2 - y^2 - 2z^2 = 16$

c) $x^2 + y^2 = 2x$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$

e) $z = x^2 - y^2$

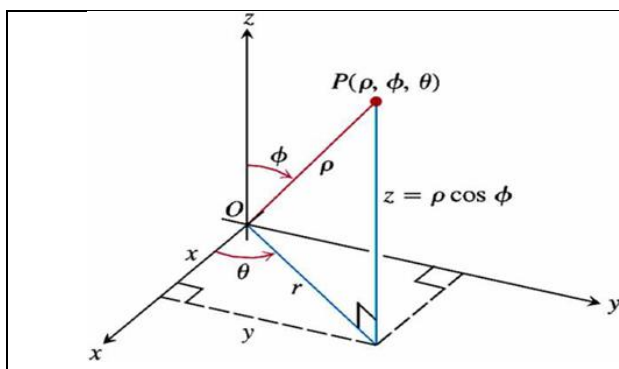
Nota sobre Sistemas de Coordenadas

Sistema de Coordenadas Cartesianas ó rectangulares: Es el sistema de coordenadas formado por un eje en la recta, por dos ejes en el plano y por tres ejes en el espacio, mutuamente perpendiculares que se cortan en un punto llamado *origen de coordenadas*.

En el plano, las coordenadas cartesianas o **rectangulares** x e y se denominan respectivamente *abscisa* y *ordenada*. Sus dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes. Un punto en

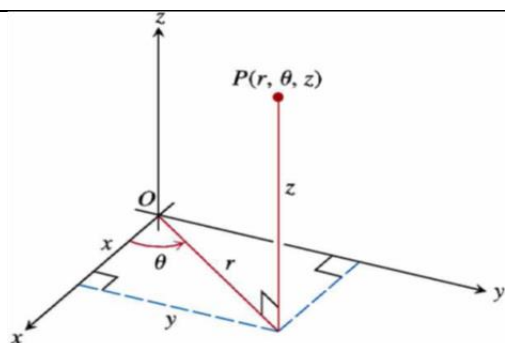
el plano se define $P(x, y)$. En el espacio se agrega la coordenada z llamada *cota*. Sus tres ejes

dividen al espacio en ocho regiones llamadas octantes. Un punto en el espacio se define $P(x, y, z)$



Sistema de Coordenadas Cilíndricas

La representación en coordenadas cilíndricas de un punto es $P(r, \theta, z)$, donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en plano xy y z (*cota*) es la distancia dirigida desde dicho plano hasta P .


Sistema de Coordenadas Esféricas

La representación en coordenadas esféricas de un punto es $P(\rho, \phi, \theta)$, donde $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$, θ es la medida en radianes del ángulo polar de la proyección de P en el plano polar xy y ϕ es la medida en radianes no negativa del ángulo menor medido desde la parte positiva del eje z al vector $\overrightarrow{OP}$.

Relaciones entre coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas:

Donde $\rho \geq 0$; $r \geq 0$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $0 \leq \phi \leq \pi$.

Observaciones:

Sistemas de Coordenadas	Cartesianas ($x; y; z$)	Cilíndricas ($r; \theta; z$)	Esféricas ($\rho; \phi; \theta$)
Cartesianas ($x; y; z$)		$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) [1]$ $z = z$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) [2]$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) [1]$
Cilíndricas ($r; \theta; z$)	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$		$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right) [2]$ $\theta = \theta$
Esféricas ($\rho; \phi; \theta$)	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$ $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ $z = \rho \cos \phi$	$r = \rho \sin \phi$ $\theta = \theta$ $z = \rho \cos \phi$	

[1] La expresión es válida para $y \geq 0$ y $x > 0$.

- ✓ Si $x < 0$, al valor obtenido hay que sumarle π .
- ✓ Si $y < 0$ y $x > 0$, al valor obtenido hay que sumarle 2π .
- ✓ Si $x = 0$ e $y > 0$, se tiene $\theta = \pi/2$.
- ✓ Si $x = 0$ e $y < 0$, se tiene $\theta = 3\pi/2$.
- ✓ Si $x = 0$ e $y = 0$, entonces θ no está definido.

[2] La expresión es válida para $z > 0$.

- ✓ Si $z < 0$, al valor obtenido hay que sumarle π .
- ✓ Si $z = 0$, se tiene $\phi = \pi/2$.