

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS DE UN SISTEMA A OTRO

COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

Coordenadas cilíndricas.

Ya hemos tenido ocasión de comprobar que ciertas gráficas bidimensionales son mas fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Lo mismo ocurre con las superficies. En esta sección introducimos dos sistemas alternativos de coordenadas para el espacio. El primero, el sistema de coordenadas cilíndricas, es una generalización de las coordenadas polares en el espacio tridimensional

EL SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS.

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P del espacio tridimensional se representa por una terna ordenada (r, θ, z) .

- a) (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano $x y$.
- b) z es la distancia dirigida de P a (r, θ) .

Para pasar de rectangulares a cilíndricas, o viceversa, hay que usar las siguientes formulas de conversión.

Cilíndricas a rectangulares.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x, \quad z = z.$$

El punto $(0, 0, 0)$ se llama el polo. Además, como la representación de un punto en polares no es única, tampoco lo es en cilíndricas.

Ejemplo 1: Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$.

Solución:

Con las fórmulas de conversión de cilíndricas a rectangulares obtenemos.

$$x = 4 \cos 5\pi/6 = 4(-\sqrt{3}/2) = -2\sqrt{3}.$$

$$y = 4 \sin 5\pi/6 = 4(1/2) = 2$$

$$z = 3$$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, 2, 3)$.

Ejemplo 2: Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación:

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$

b) $y^2 = x$

Solución a)

Por la sección precedente sabemos que la ecuación $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono recto con su eje en el eje z. Si se sustituye $x^2 + y^2$ por r^2 , se obtiene su ecuación en coordenadas cilíndricas.

$$x^2 + y^2 = 4z^2$$

Ecuación en coordenadas rectangulares.

$$r^2 = 4z^2$$

Ecuación en coordenadas cilíndricas.

Solución b)

La superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z . Sustituyendo y^2 por $r^2 \sin^2 \theta$ y x por $r \cos \theta$, se obtiene:

$$y^2 = x$$

Ecuación en coordenadas rectangulares

$$r^2 \sin^2 \theta = r \cos \theta$$

sustituir y por $\sin \theta$, x por $r \cos \theta$.

$$r(r \sin^2 \theta - \cos \theta) = 0$$

asociar términos y factorizar

$$r \sin^2 \theta - \cos \theta = 0$$

dividir m.a.m por r

$$r = \cos \theta / \sin^2 \theta$$

despejar r

Ecuación en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 3:

Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la grafica determinada por la ecuación en cilíndricas:

$$r^2 \cos(2\theta) + z^2 + 1 = 0$$

Solución:

$$r^2 \cos(2\theta) + z^2 + 1 = 0$$

Ecuación en coordenadas cilíndricas

$$r^2 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] + z^2 + 1 = 0$$

reemplazar por la identidad trigonométrica: $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + z^2 = -1$$

sustituir $r \cos \theta$ por x y $r \sin \theta$ por y

$$-x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

multiplicar m.a.m por (-1)

Ecuación en coordenadas rectangulares: Muestra que es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje y .

COORDENADAS ESFERICAS.

Es el sistema de coordenadas esféricas cada uno se representa por una terna ordenada: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera son ángulos. Es un sistema similar al de longitud-latitud que se suele utilizar para localizar puntos sobre la superficie terrestre.

EL SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS.

Es en sistema de coordenadas de sistemas esféricas un punto p del espacio viene representado por una terna ordenada (ρ, θ, Φ) .

NOTA: ρ se lee "ro" ; θ se lee "tita" ; Φ se lee "fi"

- a) ρ es la *distancia* de P al origen de coordenadas, $\rho > 0$.
- b) θ es el mismo *ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas* para $r > 0$.
- c) Φ es el *ángulo entre el semieje z positivo y el segmento recto OP*, $0 \leq \Phi \leq \pi$.

La relación entre las coordenadas rectangulares y las esféricas. Para separar uno a otro deben usarse las formas siguientes:

Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \sin \Phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \Phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \Phi.$$

Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = y/x, \quad \Phi = \arccos (z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Para cambiar de coordenadas esféricas a cilíndricas, o viceversa, deben aplicarse las formulas siguientes:

Esféricas a cilíndricas ($r > 0$):

$$r^2 = \rho^2 \sin^2 \Phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \Phi.$$

Cilíndricas a esféricas ($r > 0$):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \Phi = \arccos (z / \sqrt{r^2 + z^2}).$$

Las coordenadas esféricas son especialmente apropiadas para estudiar superficies que tenga un centro de simetría.

Ejemplo: Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para la siguiente superficie cuya ecuación en coordenadas rectangulares se indica:

$$\text{Cono recto: } x^2 + y^2 = z^2$$

Solución:

Haciendo las sustituciones adecuadas para x, y, z en la ecuación dada se obtiene:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\rho^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \Phi \sin^2 \theta = \rho^2 \cos^2 \Phi$$

$$\rho^2 \sin^2 \Phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2 \cos^2 \Phi$$

$$\rho^2 \sin^2 \Phi = \rho^2 \cos^2 \Phi$$

$$\sin^2 \Phi / \cos^2 \Phi = 1 \quad \rho > 0$$

$\tan^2 \Phi = 1$; $\Phi = \pi/4$ ó $\Phi = 3\pi/4$ La ecuación $\Phi = \pi/4$ representa la mitad superior del cono y la ecuación $\Phi = 3\pi/4$ su mitad inferior.

Calculadoras online:

a) <https://es.planetcalc.com/7952/?thanks=1>

b) <http://www.learningaboutelectronics.com/Calculadoras/>