

**NOTAS DE CÁTEDRA
UNIDAD Nº 2: RECTAS Y PLANOS**

❖ **RECTAS $\mathbb{R}^3$**

Ecuación vectorial de una recta

Una recta r queda perfectamente definida conociendo dos puntos, que definen a su vez el vector director, por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta r que pasa por un punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es paralela al vector director $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$ es:

$$r: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda(v_1; v_2; v_3) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Note que esta ecuación contiene tres igualdades simultáneamente.

Un video explicando y resolviendo ejercicios de este tema en <https://youtu.be/s36aSq4ucbq>



Podrás encontrar videos explicando y resolviendo ejercicios sobre toda la unidad en la lista de reproducción “**Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$** ”, tal vez en los videos se usen nombres distintos a los usados en las notas, **pero durante toda la materia usaremos los nombres dados en estas Notas de Cátedra.**

Si en algún video se explica algo que contradice lo dicho en las Notas de Cátedra, no dudes en consultar con tu docente o en las clases de consulta.

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLpbLLqs33glm7HW6laErbPdXGPXiv5kS>



Ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta

Desglosando las tres ecuaciones lineales involucradas en la ecuación vectorial, se define la misma recta r mediante el sistema de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones simétricas de la recta

Si ninguna componente del vector director $\vec{v}$ es nula, entonces se puede despejar λ de las tres ecuaciones cartesianas y definir la misma recta r mediante las ecuaciones simétricas:

$$r: \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Si alguna componente del vector director es nula, por ejemplo: $v_3 = 0$ se puede definir la recta r de la siguiente forma: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$; $z = z_0$

❖ PLANOS EN $\mathbb{R}^3$

Ecuación vectorial del plano

Un plano π también queda perfectamente definido a partir de tres puntos no alineados o una dirección perpendicular y un punto de este. Para determinar la ecuación vectorial del plano serán necesarias dos direcciones, es decir, dos vectores no nulos

$\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ y $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ paralelos al plano, pero no paralelos entre sí, y un punto de paso $P_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$\pi: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda(v_1; v_2; v_3) + t(u_1; u_2; u_3) \quad \text{con } \lambda, t \in \mathbb{R}$$

Note que también esta ecuación contiene 'tres' igualdades simultáneamente.

Ecuaciones cartesianas paramétricas del plano

También en este caso, desglosando las tres ecuaciones lineales y a partir de la ecuación vectorial, se define el mismo plano π mediante el sistema de ecuaciones:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 + t u_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 + t u_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 + t u_3 \end{cases} \quad \text{con } \lambda, t \in \mathbb{R}$$

Ecuación general o implícita del plano

Otra forma de describir la inclinación de un plano es a través de un vector no nulo perpendicular al plano, denominado *normal*. La ecuación del plano π que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es normal al vector $\vec{n} = (a; b; c)$ es:

$$\pi: ax + by + cz = d$$

Deducción.: Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico del plano. Resultará siempre que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0$. Como $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ queda entonces:

$$(a; b; c) \cdot (x - x_0; y - y_0; z - z_0) = 0 \quad [1]$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad [2]$$

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \Rightarrow ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d$$

A la ecuación [1] se la denomina ecuación *punto normal* del plano.

Planos coordenados

En $\mathbb{R}^3$ existen tres planos coordenados:

- **Plano coordenado "xy":** Es el plano que contiene a los ejes x e y . Entonces contiene también al punto $P_0(0; 0; 0)$ y es normal al versor $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Si remplazamos en [2] tenemos: $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, es decir que $z = 0$

0 es la ecuación del plano “ xy ”.

- **Plano coordenado “ xz ”:** Es el plano que contiene a los ejes x y z . También contiene también al punto $P_0(0;0;0)$ y es normal al versor $\vec{j} = (0;1;0)$. Si reemplazamos en [2] tenemos: $0(x-0) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0$, es decir que $y = 0$ es la ecuación del plano “ xz ”.
- **Plano coordenado “ yz ”:** Es el plano que contiene a los ejes y y z . También contiene también al punto $P_0(0;0;0)$ y es normal al versor $\vec{i} = (1;0;0)$. Si reemplazamos en [2] tenemos: $1(x-0) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0$, es decir que $x = 0$ es la ecuación del plano “ yz ”.

❖ POSICIONES RELATIVAS EN $\mathbb{R}^3$

Entre dos rectas:

- Dos rectas r_1 y r_2 son *paralelas* no coincidentes si sus respectivos vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos, es decir, $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$ y además no comparten **ningún** punto en común, es decir, su intersección es vacía.
- Dos rectas r_1 y r_2 son *coincidentes* si sus respectivos vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos y además tienen **todos** sus puntos en común.
- Dos rectas r_1 y r_2 son *secantes* si sus respectivos vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no son paralelos, es decir, $\vec{v}_1 \neq \lambda \vec{v}_2$ y además tienen un **único** punto en común.
- Dos rectas r_1 y r_2 son *alabeadas* si sus respectivos vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ **no** son paralelos y además no comparten **ningún** punto en común.

Entre dos planos:

- Dos planos π_1 y π_2 son *paralelos* no coincidentes si sus respectivos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son paralelos, es decir, $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ y además no comparten **ningún** punto en común, es decir, su intersección es vacía.
- Dos planos π_1 y π_2 son *coincidentes* si sus respectivos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son paralelos y además tienen **todos** sus puntos en común.
- Dos planos π_1 y π_2 son *secantes* si sus respectivos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ no son paralelos, es decir, $\vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2$. Tienen en común infinitos puntos, ya que al intersectarse determinan una recta.

Podemos encontrar un Ejemplo de posición relativa entre planos en el siguiente video: <https://youtu.be/lq-XN1pTWg>



Entre una recta y un plano:

- Una recta r_1 es *paralela* (no contenida) a un plano π_1 si el vector director $\vec{v}_1$ de la recta es perpendicular a la normal $\vec{n}_1$ del plano, es decir, $\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$ y además no comparten **ningún** punto en común ya que su intersección es vacía.
- Una recta r_1 está contenida o pertenece al plano π_1 si el vector director $\vec{v}_1$ de la recta es perpendicular a la normal $\vec{n}_1$ del plano, $\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$ y además todos los puntos de la recta son también puntos del plano, es decir, tienen infinitos puntos en común.
- Una recta r_1 y un plano π_1 son secantes si el vector director $\vec{v}_1$ de la recta no es perpendicular a la normal $\vec{n}_1$ del plano, $\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 \neq 0$. Tienen en común un **único** punto.

❖ DISTANCIAS EN $\mathbb{R}^3$

Distancia entre dos puntos

Sean $P(x_1; y_1; z_1)$ y $Q(x_2; y_2; z_2)$ dos puntos del espacio tridimensional. La distancia entre ambos se denota $d(P; Q)$ y se obtiene a través de la expresión:

$$d(P; Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia entre un punto y un plano

Sean un plano π y un punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ del espacio tridimensional. La distancia entre ambos se denota $d(P_0; \pi)$ y se obtiene a través de la expresión:

$$d(P_0; \pi) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Siendo $P_1(x_1; x_2; x_3)$ cualquier punto del plano y $\vec{n}$ su vector normal.

Distancia entre un punto y una recta

Sean una recta r y un punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ del espacio tridimensional. La distancia entre ambos se denota $d(P_0; r)$ y se obtiene a través de la expresión:

$$d(P_0; r) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Siendo $P_1(x_1; x_2; x_3)$ cualquier punto de la recta y $\vec{v}$ su vector director.

Distancia entre dos rectas

Sean dos rectas r_1 y r_2 con sus respectivos vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

- Si las dos rectas son coincidentes o secantes la distancia entre ellas es $d(r_1; r_2) = 0$.
- Si las rectas son paralelas no coincidentes la distancia entre ellas puede obtenerse como la distancia entre un punto y una recta:

$$d(r_1; r_2) = d(P_1; r_2) = d(P_2; r_1)$$

siendo P_1 y P_2 puntos pertenecientes respectivamente a las rectas r_1 y r_2 .

- Si las rectas son alabeadas la distancia entre ellas está dada por la expresión:

$$d(r_1; r_2) = \frac{\| \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \|}{\| \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \|}$$

siendo P_1 y P_2 puntos pertenecientes respectivamente a las rectas r_1 y r_2 .

Distancia entre dos planos

Sean dos planos π_1 y π_2 con sus respectivos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

- Si los dos planos son coincidentes o secantes la distancia entre ellos es $d(\pi_1; \pi_2) = 0$.
- Si los planos son paralelos no coincidentes la distancia entre ellos puede obtenerse como la distancia entre un punto y un plano:

$$d(\pi_1; \pi_2) = d(P_1; \pi_2) = d(P_2; \pi_1)$$

siendo P_1 y P_2 puntos pertenecientes respectivamente a los planos π_1 y π_2 .

Podemos encontrar un Ejemplo en el siguiente video:

<https://youtu.be/deS3PstD6iq>



❖ ÁNGULOS EN $\mathbb{R}^3$

Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas r_1 y r_2 está definido por el ángulo que determinan sus respectivos vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Se denota $(\widehat{r_1; r_2})$ y se obtendrá de la expresión:

$$\cos(\widehat{r_1; r_2}) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}$$

Se cumple que $0 \leq (\widehat{r_1; r_2}) \leq \frac{\pi}{2}$

Ángulo entre dos planos

De manera análoga, el ángulo diedro entre dos planos π_1 y π_2 está definido por el ángulo que determinan sus respectivos vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$. Se denota $(\widehat{n_1; n_2})$ y se

obtendrá entonces:

$$\cos(\widehat{n_1; n_2}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

De igual manera se cumple que $0 \leq (\widehat{n_1; n_2}) \leq \frac{\pi}{2}$

Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo determinado por una recta r y un plano π es el ángulo **complementario** al que forman el vector director de la recta $\vec{v}$ y el vector normal del plano $\vec{n}$. Se denota $(\widehat{v; n})$ y se obtiene a través de la expresión:

$$\sin(\widehat{v; n}) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}\|}$$

Se cumple que $0 \leq (\widehat{v; n}) \leq \frac{\pi}{2}$

Nota: Observar que se utilizó $\sin(\widehat{v; n})$ en lugar de $\cos(\widehat{v; n})$ para ahorrar un cálculo. Debido a que el ángulo que forman la normal del plano y el vector director de la recta es complementario al ángulo buscado.

Podemos encontrar un Ejemplo en el siguiente video:
<https://youtu.be/a049gRmVAOo>



GUÍA DE TRABAJO PRÁCTICO N° 2 RECTAS Y PLANOS

- Halle una ecuación vectorial de la recta r que pasa por el punto $P(1; 2; 3)$ y:
 - Es paralela al vector $\vec{u} = (-1; 0; 1)$
 - Es perpendicular al vector $\vec{v} = (-1; 0; 1)$ ¿es única?
 - También pasa por el punto $Q(-1; 0; 1)$



En el siguiente link podrás aprender cómo definir rectas en $\mathbb{R}^3$.

<https://www.geogebra.org/m/WngkJHhJ>



- Dada la recta $r: x + 1 = 2y - 3; z = 4$ encuentre:
 - Tres puntos distintos de r .
 - $h \in \mathbb{R}$ para que el punto $P(h; h - 1; 4)$ esté sobre la recta r .
 - Un vector paralelo a r .
 - Las ecuaciones cartesianas paramétricas de una recta paralela a r y que pase por el origen de coordenadas.
- Halle una ecuación vectorial de la recta r que contiene al punto $P(2; -1; 3)$ y es perpendicular a la recta:

$$s: y + 2 = z - 4; x = 3$$

4. Determine la posición relativa entre las rectas

$$r: (x; y; z) = (1 + 2t; 1 - t; 3t)/t \in \mathbb{R} \text{ y } s: \begin{cases} x = -3 + 4y \\ z = 1 - 3y \end{cases}$$



Puede visualizar previamente y luego corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

En el siguiente link un video que explica como trabajar con rectas y planos <https://youtu.be/y4Ez-lRcOmA>



5. Sean las rectas $r: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ y $l: \begin{cases} \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ halle de ser posible:

- El punto P común a ambas rectas.
- La recta perpendicular simultáneamente a r y l que pase por P .
- Una ecuación vectorial de la recta s que pasa por los puntos P y $Q(3; 1; 0)$.



Puede visualizar previamente y luego corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

6. Determine:

- Una ecuación del plano π que pasa por el punto $P(1; 2; -3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (5; -6; -1)$.
- Otros tres puntos que pertenezcan a π .
- $h \in \mathbb{R}$ para que el punto $P(0; h + 2; 4)$ esté sobre el plano dado.

7. Señale en cada caso con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justifique analíticamente. (La visualización que pueda realizar con GeoGebra de cada situación no es una justificación válida)

Dado el vector $\vec{v} = (1; \sqrt{3}; 1)$:

- El vector $\vec{v}$ es perpendicular al plano $\alpha: x + z = 0$
- El vector $\vec{v}$ es paralelo al plano $\beta: x = z$
- El vector $\vec{v}$ es normal del plano $\pi: 3x + 3y = -3\sqrt{3}z$

8. Halle una ecuación general del plano π que pasa por $P(2; -1; 4)$ y es paralelo:

- Al plano coordenado xy
- Al plano coordenado yz
- Al plano $y = -3$
- Al plano $\pi: 5x - 3y + 6z = 0$

9. Halle una ecuación general del plano que contiene al eje z y al punto $P(4; -2; 1)$.

10. Determine los valores de m y $h \in \mathbb{R}$ para que los puntos $P(2; m-1; 2)$ y $Q(0; m+h; h)$ pertenezcan al plano $\pi: hx + y - 4z + m = 0$

11. Encuentre una ecuación del plano perpendicular a $\pi: x - 2y + 3z - 6 = 0$, que contiene a los puntos $A(1; 2; 3)$ y $B(4; 0; -1)$

12. Determine una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P(2; -4; 5)$ y que es:

- Perpendicular al plano $\pi: -3x + 4y - 2z = 0$



- b) Paralela a los planos $\pi: x - 3y + z = 2$ y $\beta: x - 4y + z - 9 = 0$
 Puede visualizar y corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

13. Halle las ecuaciones cartesianas y vectorial paramétricas de la recta intersección de los planos:

$$\pi_1: x + y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2: x + y + 3z - 2 = 0$$

14. Halle la distancia entre los puntos $P(4; -3; 9)$ y $Q(-5; 4; -6)$ y entre cada uno de los puntos y la recta de ecuación $r: (x; y; z) = \lambda(-1; 1; 1) + (1; 0; 1)$.



15. Calcule la distancia del plano $\pi: 2x - 3y + z - 5 = 0$
 Visualice los planos y puntos, trabajando con GeoGebra, para anticipar lo que obtendrá en la resolución analítica.

- Al punto $P(-1; 3; 0)$
- Al punto $O(0; 0; 0)$
- Al plano $\beta: -4x + 6y - 2z + 13 = 0$

16. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ y $l: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$

- Estudie la posición relativa entre ellas.
- Calcule la distancia entre las dos rectas.
- Determine el ángulo entre ambas rectas.



Puede visualizar y corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

17. Dada la recta $r: \begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - 2y + z = 0$

- Encuentre si existe intersección entre ambos y estudie su posición relativa.
- Calcule la distancia entre r y π .
- Determine el ángulo comprendido entre r y π .



Puede visualizar y corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

18. Dadas los planos $\pi_1: x - 3y + z = 2$ y $\pi_2: x - 4y + z - 9 = 0$

- Halle la medida del ángulo entre los planos
- Determine intersección entre los planos.
- ¿Cuál es la distancia entre π_1 y π_2 ?



Puede visualizar y corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

19. Halle todos los puntos que se encuentran a una distancia de 2 unidades del plano $\pi: 2x - y - 2z = 0$ y pertenecen a la recta $r: (x; y; z) = (1; 0; 0) + (2t; -t; 2t)/t \in \mathbb{R}$

❖ **EJERCICIOS ADICIONALES:**

1. Dadas las rectas $r(x; y; z) = (-1 + 4t; 3 + t; 1) / t \in \mathbb{R}$ y $s: \frac{x+13}{12} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{3}$
 - a) Halle la intersección entre ellas.
 - b) Sólo con la información obtenida en el punto anterior, ¿puede establecer la posición relativa entre las rectas dadas?
2. Dadas $r_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{2}$; $r_2: x = -3$; $\frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-2}$ y $r_3: \frac{x+3}{-4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{-2}$

determine cuáles pares de tales rectas son:

- a) Paralelas;
 - b) Coincidentes
 - c) Secantes.
3. Dados los puntos $A(1; 2; -1)$; $B(0; 3; -4)$ y $C(-2; 1; 3)$:
 - a) Verifique que los tres puntos no están alineados,
 - b) Halle una ecuación general para el plano que los contiene.
 - c) ¿Para qué valores de $h \in \mathbb{R}$ la recta $r: \frac{x-28h+10}{-1} = \frac{y-2h-1}{13} = \frac{z-h}{12}$ pertenece al plano hallado en b)?



Puede visualizar y corroborar su resolución analítica trabajando con GeoGebra

4. Determine una ecuación general del plano que pasa por el punto $P(-4; 0; 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (5; -1; 2)$ y $\vec{v} = (-1; 0; 1)$.
5. Obtenga los valores de m y $h \in \mathbb{R}$ para que los puntos $P(-1; 0; 4)$, $Q(0; m; 2)$ y $R(h; h; 10)$ sean colineales.
6. Halle las ecuaciones general y vectorial del plano perpendicular a los planos $\pi_1: x - 2y + 3z - 5 = 0$ y $\pi_2: 3x + 2z - 7 = 0$ y que contiene al punto $P(-4; 2; 1)$.
7. Dos caras opuestas de un cubo se encuentran en los planos:

$$\pi: 3x - y + 2z = 5 \quad \text{y} \quad \beta: 3x - y + 2z = 7.$$

Calcule el volumen del cubo utilizando los contenidos desarrollados en la unidad.

8. Halle, si existe, la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi: 2x - y - 2z = 0$ y además perpendicular a la recta $r: (x; y; z) = (1; 0; 0) + (2t; -t; 2t)/t \in \mathbb{R}$
9. Dada la recta $r: (x; y; z) = (1; 2; 3) + t(2; -1; h)$ y el plano $\pi: 2x - hy + 3z = m$; calcule los valores de m y $h \in \mathbb{R}$ para que la recta r :
 - a) Esté incluida en el plano π .
 - b) Sea paralela al plano y no tenga puntos comunes con el plano π .
10. Dadas las rectas $r: (x; y; z) = t(2; -1; 4)$; $l: \frac{x-1}{-2} = y = \frac{z-3}{-4}$ y el plano $\pi: 2x + 3y - 5z - h - 1 = 0$, halle de ser posible:
 - a) La ecuación del plano determinado por r y l .
 - b) $h \in \mathbb{R}$, sabiendo que la distancia del punto $P(h; 2; -1)$ al plano π es $\sqrt{38}$.

❖ **EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN:**

1. Dado el plano $\pi: x + 2y - 4z = 7$, encuentre tres versores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que dos a dos sean ortogonales entre sí y que tanto $\vec{u}$ como $\vec{v}$ sean paralelos al plano π .
2. Sean $r: (x; y; z) = t(0, 4, 2) + (0, 3, 0)$; $l: (x; y; z) = \lambda(1, 0, 1)$ y $s: (x; y; z) = \mu(0, 1, -1) + (1, 0, 4)$ tres rectas. Hallar la intersección del plano π con la recta s , sabiendo que r está incluida en el plano π y l es paralela a este.
3. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $P(1; 2; 1)$ y a la recta $r: (x; y; z) = (1; 3; 0) + t(2; 1; -1) / t \in \mathbb{R}$
4. Sean $r: (x; y; z) = (2; 2; h) + t(1; -1; -1)$ y $l: (x; y; z) = (h; 1; 1) + \lambda(0; 2; 1)$. Encuentre, de ser posible, $h \in \mathbb{R}$ para que las rectas r y l sean coplanares. Para el
5. valor de h obtenido, hallar el plano que contiene a las rectas dadas.
6. Dados los planos $\pi_1: hx + y + z = 1$; $\pi_2: x + hy + z = 1$ y $\pi_3: x + y + hz = 1$
 - a) Determine $h \in \mathbb{R}$, si existe, para que los planos se corten en un solo punto.
 - b) Determine $h \in \mathbb{R}$, si existe, para que los planos no tengan ningún punto en común
7. Según los valores reales de $k \in \mathbb{R}$, estudie las posiciones relativas del plano $\beta: x + ky - z = 1$ y de la recta $r: \begin{cases} 2x + y - kz = 2 \\ x - y - z = k - 1 \end{cases}$
8. Dado el plano $\pi: (x; y; z) = (0; 1; 2) + t(-1; -1; 2) + \lambda(1; 1; 0)$ con $t, \lambda \in \mathbb{R}$
 - a) Halle la proyección ortogonal del punto $A(2; 1; 3)$ sobre el plano π .
 - b) Obtenga todos los puntos del eje "y" que distan $\sqrt{2}$ unidades del plano π .
9. Dada la recta $r: (x; y; z) = (4; -2; 0) + t(-4; 4; 1)$ y el plano $\pi: x - y - z = 0$. Obtenga la ecuación de la recta que resulta de la proyección ortogonal de r sobre π .
10. Dadas las rectas $r: \frac{x-6}{-h} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{h}$ y $l: (x, y, z) = (5 + t; 4 - 2t; 1 + t)$
 - a) Indique si existe algún valor de $h \in \mathbb{R}$ para se cumpla alguna de las siguientes condiciones:
 - i. r sea paralela a l .
 - ii. $d(r, l) = 0$
 - b) Encuentre, si es posible, una ecuación vectorial de la recta s que sea perpendicular a la recta l y esté contenida en el plano $\pi: x + 2y - 2z = 4$