

ESPACIOS VECTORIALES REALES



Conjunto de números reales (Repaso)

La unión de los números racionales y los irracionales conforma un conjunto denominado de los números reales, $\mathbb{R}$

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se definen dos operaciones o también llamadas **leyes de composición**, denominadas adición y multiplicación, con respecto a las cuales verifica ciertas propiedades.

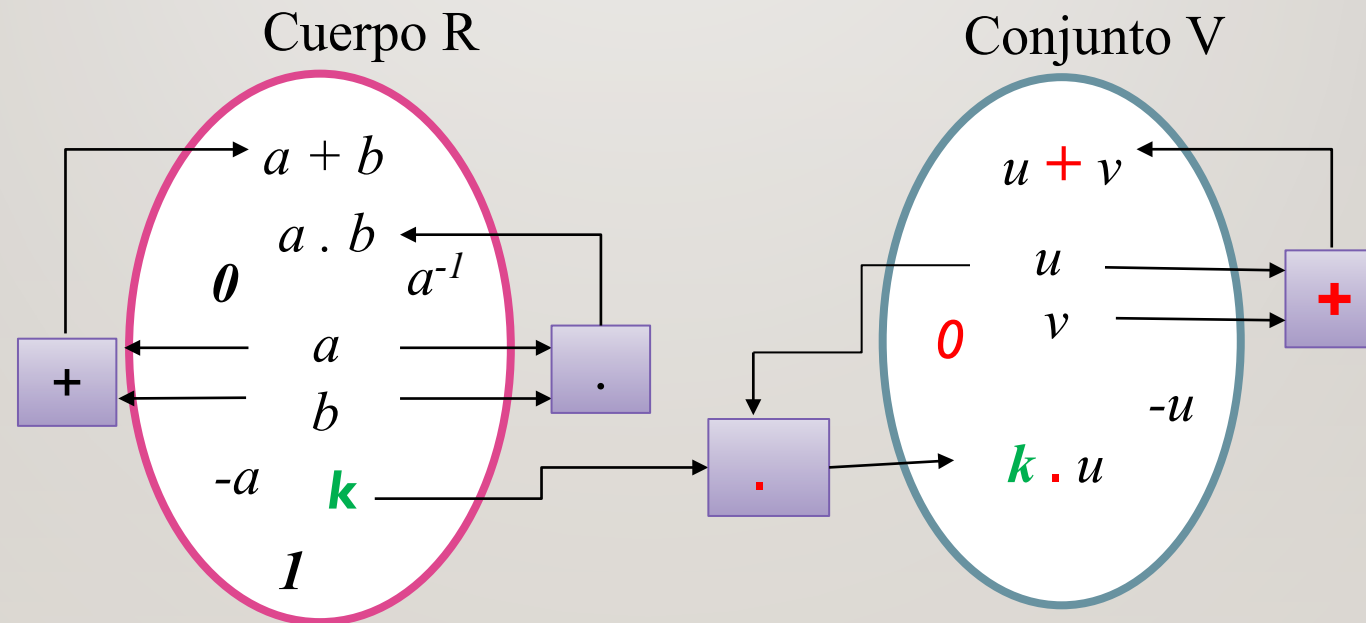
Propiedades	Adición	Multiplicación
Conmutativa	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R} / a + 0 = 0 + a = a$	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R} / a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento opuesto	$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} / a + (-a) = (-a) + a = 0$	$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
Distributiva	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

De este modo, el conjunto de los números reales tiene, con respecto a las operaciones de adición y multiplicación se dice que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo conmutativo**.



Conjunto de vectores (V)	Vectores en $\mathbb{R}^2$	Vectores en $\mathbb{R}^3$	Matrices ($\mathbb{R}^{m \times n}$)
	$\vec{v} = (a; b)/a, b \in \mathbb{R}$	$\vec{v} = (a; b; c)/a, b, c \in \mathbb{R}$	$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
		Operaciones	
Adición	$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^2$	$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$	$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Multiplicación por un $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$	$\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{k} \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^2$	$\vec{u} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{k} \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^3$	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{k} \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Propiedades de la adición	Asociativa Conmutativa Existencia de Elemento neutro Existencia Elemento opuesto		
Propiedades de la multiplicación por un $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$	Conmutativa Existencia de Elemento neutro		
Propiedades que vinculan a ambas	Distributivas de la multiplicación respecto de la adición		

ESPACIO VECTORIAL



Ejemplo 1: $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un número real son espacios vectoriales.

Ejemplo 2: El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que cuyos extremos pertenecen a la recta $y = 3x$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un **número real**.
¿Es un espacio vectorial?

Si dicho conjunto se puede escribir como $V = \{(x; 3x) / x \in \mathbb{R}\}$, de modo que reformulando la pregunta resulta ¿ $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un número real es un espacio vectorial?

Ejemplo 3: El conjunto de matrices cuadradas de orden 2 operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un **número real**. ¿Es un espacio vectorial?

Si dicho conjunto se puede escribir como $V = \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ de modo que reformulando la pregunta resulta $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un número real es un espacio vectorial?

Actividad:

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ cuyos extremos pertenecen a la recta $y = 3x + 2$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un **número real**. ¿Es un espacio vectorial?

Si dicho conjunto se puede escribir como $V = \{(x; 3x+2) / x \in \mathbb{R}\}$, de modo que reformulando la pregunta resulta $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un número real es un espacio vectorial?



SUBESPACIO VECTORIAL

Sea $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un espacio vectorial y $S \subseteq V$. Entonces S es un subespacio de V si y sólo si cumple con la siguientes propiedades:

- a) El elemento neutro para la suma, $\mathbf{0} \in S$
- b) $u, v \in S$ entonces $u + v \in S$
- c) Sean $k \in \mathbb{R}$ y $u \in S$ entonces $k \cdot u \in S$

Obs:

- ❖ No todo subconjunto de V puede ser subespacio de V
- ❖ Todo espacio vectorial $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ tiene como subespacios vectoriales a V y $\{\mathbf{0}\}$ los cuales se denominan **subespacios triviales de V** .
- ❖ Con relación a las dos últimas propiedades pueden asociarse y probarse que

Sea $k, m \in \mathbb{R} \wedge u, v \in S$ entonces $\underbrace{k \cdot u + m \cdot v}_{\text{Combinación Lineal}} \in S$

Combinación Lineal

Ejemplo : Sea el conjunto $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 5z = 0\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Analizar si S es un subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un número real.

Verifiquemos si las propiedades se cumplan:

a) El elemento neutro para la suma,
 $0 \in S$

b) Sea $k, m \in \mathbb{R} \wedge u, v \in S$
entonces $k \cdot u + m \cdot v \in S$

Actividad:

Investiga si los siguientes conjuntos son subespacios de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ con las operaciones “usuales” de adición y multiplicación por un número real.

a) $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$

b) $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / z = y + 2\}$

SISTEMA GENERADOR DEL ESPACIO VECTORIAL

$(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$

Un conjunto de vectores es un **sistema generador** G del espacio vectorial $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ si cualquier vector de V se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de G .

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son las **coordenadas** del vector V respecto del **sistema de generadores**.

EJEMPLO DE SISTEMA DE GENERADORES

El conjunto $G = \{ (0;1;1), (1;0;1), (1;1;0) \}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ tal que $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \cdot)$

Para justificar esta afirmación se debe mostrar que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como **combinación lineal** de los vectores de G

Esto es que $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ debe por escribirse como $(x;y;z) = \alpha_1 (0;1;1) + \alpha_2 (1;0;1) + \alpha_3 (1;1;0)$

$$\begin{aligned}\alpha_1 (0;1;1) + \alpha_2 (1;0;1) + \alpha_3 (1;1;0) &= (x;y;z) \\ (0; \alpha_1; \alpha_1) + (\alpha_2; 0; \alpha_2) + (\alpha_3; \alpha_3; 0) &= (x;y;z) \\ (\alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_2) &= (x;y;z)\end{aligned}$$



$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{UN SISTEMA DE ECUACIONES} \\ \text{LINEALES donde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \text{son las incógnitas} \end{array}$$

Su matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y su matriz ampliada $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{bmatrix}$

❖ $\text{Det}(A) \neq 0$

❖ $\text{Rg}(A) = 3$, igual al rango de la matriz ampliada que es igual a la cantidad de incógnitas.

Por lo tanto, el sistema es **compatible determinado**

Esto indica que es posible escribir cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ como **combinación lineal** de los vectores de G (y de forma **única**), es decir, G es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$

*Si un sistema generador G del espacio vectorial $(V, +, R, .)$ es linealmente independiente entonces se dice que G es una **base** de V*

Ejemplo 1: Como ya se mostró el conjunto $G = \{ (0;1;1), (1;0;1), (1;1;0) \}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ tal que $(\mathbb{R}^3, +, R, .)$

Ahora veamos si el conjunto $G = \{ (0;1;1), (1;0;1), (1;1;0) \}$ es linealmente independiente.

De manera que debemos mostrar que :

$$\alpha_1 (0;1;1) + \alpha_2 (1;0;1) + \alpha_3 (1;1;0) = (0;0;0) \text{ únicamente para } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \text{ y } \alpha_3 = 0$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 (0;1;1) + \alpha_2 (1;0;1) + \alpha_3 (1;1;0) &= (0;0;0) \\ (0; \alpha_1; \alpha_1) + (\alpha_2; 0; \alpha_2) + (\alpha_3; \alpha_3; 0) &= (0;0;0) \\ (\alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_2) &= (0;0;0)\end{aligned}$$



$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

UN SEL HOMOGÉNEO
donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son las
incógnitas

Su matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y su matriz ampliada $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

❖ $\text{Det}(A) \neq 0$

❖ $\text{Rg}(A) = 3$, igual al rango de la matriz ampliada que es igual a la cantidad de incógnitas. Por lo tanto, el sistema es **compatible determinado**

Esto indica que $\alpha_1(0;1;1) + \alpha_2(1;0;1) + \alpha_3(1;1;0) = (0;0;0)$ únicamente para $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$, por lo tanto, **G es linealmente independiente**

$G \left\{ \begin{array}{l} \text{Es un } \textit{SISTEMA GENERADOR} \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\ \text{Es } \textit{LINEALMENTE INDEPENDIENTE} \end{array} \right.$



G es una **base** de $\mathbb{R}^3$

Un espacio vectorial (EV) con un sistema de generadores finito se dice que es de dimensión finita:

La misma cantidad de elementos de una base de un EV se la denomina dimensión del espacio vectorial

Todas las bases de un espacio vectorial con un sistema de generadores finito tiene la misma cantidad de elementos

Se mostró que conjunto $G = \{ (0;1;1), (1;0;1), (1;1;0) \}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \cdot)$ y cantidad de elementos de G es 3, por lo tanto, la **dimensión del espacio vectorial** es 3

En general:

- Sea el espacio vectorial real $V = \{vector\ nulo\} \Leftrightarrow \dim(V) = 0$
- Sea el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^n$, $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 2:

Analizar si el conjunto $G = \{ (1;0) , (0;1), (1;1) \}$

a) Es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$ tal que $(\mathbb{R}^2 , +, R, .)$

b) Es una base de $\mathbb{R}^2$

a) Se debe mostrar que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como **combinación lineal** de los vectores de G

Esto es que $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ debe por escribirse como $\alpha_1 (1;0) + \alpha_2 (0;1) + \alpha_3 (1;1) = (x;y)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 (1;0) + \alpha_2 (0;1) + \alpha_3 (1;1) &= (x;y) \\ (\alpha_1; 0) + (0; \alpha_2) + (\alpha_3; \alpha_3) &= (x;y) \\ (\alpha_1 + \alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3) &= (x;y) \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x \\ \alpha_2 + \alpha_3 = y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{UN SISTEMA DE ECUACIONES} \\ \text{LINEALES donde } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \text{son las incógnitas} \end{array}$$

$\text{Rg}(A) = 2$, igual al rango de la matriz ampliada que es menor a la cantidad de incógnitas. Por lo tanto, el sistema es **compatible indeterminado**.

Esto indica que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse de infinitas maneras como **combinación lineal** de los vectores de G . Por lo tanto, G es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$ tal que $(\mathbb{R}^2 , +, R, .)$

b) Ahora veamos si el conjunto $G=\{(1;0),(0;1),(1;1)\}$ es linealmente independiente. De manera que debemos mostrar que :

$$\underline{\alpha_1 (1;0) + \alpha_2 (0;1) + \alpha_3 (1;1) = (0;0) \text{ únicamente para } \alpha_1=0, \alpha_2=0 \text{ y } \alpha_3=0}$$

$$\alpha_1 (1;0) + \alpha_2 (0;1) + \alpha_3 (1;1) = (0;0)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1; 0) + (0; \alpha_2) + (\alpha_3; \alpha_3) &= (0;0) \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{cases} \\ (\alpha_1 + \alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3) &= (0;0) \end{aligned}$$

UN SEL
HOMOGÉNEO
donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son
las incógnitas

Vemos que el SEL tiene más incógnitas que ecuaciones y es homogéneo, por lo tanto, es **compatible indeterminado**. Esto indica que G NO es linealmente independiente.

De manera que G es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$ tal que $(\mathbb{R}^2, +, R, \cdot)$ pero NO es una base del mismo

Actividad:

A) Analizar si los siguientes conjuntos son sistemas generadores y base de $\mathbb{R}^2$ tal que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \cdot)$

a) $G = \{(\frac{1}{2}; 0), (0; \frac{1}{3})\}$

b) $G = \{(3; 2)\}$

c) $G = \{(3; 2), (4; -1), (5; -1)\}$

B) Analizar si los siguientes conjuntos son sistemas generadores y base de $\mathbb{R}^3$ tal que $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \cdot)$

a) $G = \{ (0; 1; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0) \}$

b) $G = \{ (0; 1; 0), (1; 0; 0) \}$

c) $G = \{ (9; -3; 7), (1; 8; 8), (5; -5; 1) \}$

Si relacionamos el concepto de dimensión de un espacio vectorial con los conceptos de geometría analítica sobre rectas y planos en $\mathbb{R}^3$, vemos que:

- ❖ Los planos que pasan por $(0;0;0) \rightarrow$ Son subespacios $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.
- ❖ Las rectas que pasan $(0,0,0) \rightarrow$ Son subespacios $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.

Base y dimensión de un subespacio

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0, -x + y - z = 0\}$$

S_1 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Buscamos una base y la dimensión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{S_1} = \{(-1, 0, 1)\} \quad \dim(S_1) = 1$$

Extensión y reducción de un conjunto de vectores para que formen una base de un espacio vectorial

El proceso de extensión y reducción de un conjunto de vectores G para que formen una base de un espacio vectorial real específico consiste en incorporar o eliminar vectores del conjunto G de modo tal de conservar el rango de la matriz que tiene a dichos vectores como columna.

Ejemplo 1: *Extender*, si es posible, el conjunto $G_1 = \{(1,0,2), (1,0,-1)\}$ para que forme una base de $\mathbb{R}^3$

$G_1 = \{(1,0,2), (1,0,-1)\}$ es L.I.

Pero G_1 tiene dos elementos. No es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ ya que no es posible que todo vector de $\mathbb{R}^3$ pueda escribirse como combinación lineal de los vectores de G_1 .

Por ejemplo, el $(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ pero no puede escribirse como combinación lineal de ellos (Si se construye un SEL con dicha información este resultará **incompatible**).

Pero si a G_1 se le une con un conjunto G_2 formado por un vector de manera que siga siendo independiente de los vectores del G_1 . Por ejemplo $(0,1,0)$.

Resulta que $G_1 \cup G_2 = \{(1,0,2), (1,0,-1), (0,1,0)\}$ es LI, y genera $\mathbb{R}^3$. Por tanto, $\{(1,0,2), (1,0,-1), (0,1,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2: *Reducir*, si es posible, el conjunto $G_1 = \{(2,0,0), (0,3,0), (4,1,0)\}$ para que forme una base del $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z=0\}$

G_1 es un sistema generador de S , pero es L. D. (Si se construye un SEL con dicha información este resultará compatible indeterminado o bien si se analiza el determinante de la matriz de coeficientes de dicho SEL este es 0).

Por tanto, G_1 no es una base de S .

Pero si a G_1 se le resta un conjunto G_2 , por ejemplo, $G_2 = \{(4,1,0)\}$ (también podría eliminarse a cualesquiera de los otros dos vectores). El conjunto $G_1 - G_2$ resulta generador del subespacio S y LI, por lo tanto, se tendrá una base de S .

Notese que si se una matriz M_1 de modo que las filas sean los vectores de G_1 resulta que $\text{rg}(M_1) = 2$, por lo tanto, esto se interpretaría como que uno de los vectores es C.L de los restantes y puede quitarse. Ahora si se construye una matriz M_2 de modo que las filas sean los vectores de $G_1 - G_2 = \{(2,0,0), (0,3,0)\}$, $\text{Rg}(M_2)=2$ y es LI entonces $\{(2,0,0), (0,3,0)\}$ es una base de S .

Coordenadas y cambio de base

Véase la siguiente situación:

Si se considera la base canónica $B = \{(1; 0), (0; 1)\}$ y el vector $(-1; 2)$ puede escribirse como CL de los vectores de B , esto es $(-1; 2) = -1 (1; 0) + 2 (0; 1)$. Mientras que si se considera la base ordenada $B_1 = \{(3, 1), (-1, 1)\}$, sus coordenadas son $\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$, ya que $(-1; 2) = \frac{1}{4} (3; 1) + \frac{7}{4} (-1; 1)$.

La pregunta es: *¿Qué se debe hacer cuando se tiene un vector escrito en coordenadas en una base B y se pretende conocer las coordenadas en una base B_1 ?*

La respuesta es que se debe hacer un *cambio de base* y este procedimiento consiste en encontrar una matriz tal que teniendo un vector “escrito” en la base B , nos “devuelva” al vector “escrito” en la base B_1 . Dicha matriz recibe el nombre de *matriz de cambio de base* y se denotará M_{BB_1}

Para la situación planteada, la idea es hallar la matriz de cambio de base tal que:

$$M_{BB_1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

De modo que se debe determinar el vector de coordenadas de cada uno de los elementos de la **Base**_{antigua} en función de la **Base**_{nueva}.

Aunque la idea consiste en trabajar con los vectores uno por uno. Es posible trabajarlos de una sóla vez. Para ello se usará la matriz construida de tal manera que:

$$[\text{Base}_{\text{nueva}} | \text{Base}_{\text{antigua}}]$$

Y se aplica a esta matriz el proceso de Gauss-Jordan (que se ha visto en el UNIDAD 2), de modo que se consigue:

$$[\text{Base}_{\text{nueva}} | \text{Base}_{\text{antigua}}] \rightarrow [I | P] \quad \text{siendo} \quad P = M_{BB_1}$$

Aplicando esta idea al ejemplo se tiene:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}\right) \\ 0 & 1 & \left(-\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{3}{4}\right) \end{array} \right]$$

La matriz de cambio de base resulta

$$M_{BB_1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}\right) \\ \left(-\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{3}{4}\right) \end{bmatrix} \text{ pues } \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4}\right) \\ \left(-\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{3}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} \text{ (verificación)}$$

Propiedades de las matrices de cambio de base .

1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada de orden n , donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.

2. Toda matriz de cambio de base es invertible. Además, la matriz de cambio de B a B_1 es inversa de la matriz de cambio de B_1 a B .
3. La matriz de cambio de una base B a la misma base B , es la matriz identidad.

Actividad:

Comprobar en el ejemplo anterior que M_{BB_1} y M_{B_1B} son inversas entre sí