

UNIDAD N° 0: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Ecuación Lineal

Una ecuación lineal de

n variables: $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una expresión que puede escribirse en la forma:

$\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{x}_2+...+\mathbf{a}_n\mathbf{x}_n=\mathbf{b}$, con $n \in N$. Donde los números reales o complejos $\mathbf{a}_i$ se denominan coeficientes, $\mathbf{x}_i$ son las incógnitas y $\mathbf{b}$ recibe el nombre de término independiente.

Una **solución** de una ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, es un conjunto de valores $(s_1; s_2; \dots; s_n)$ que satisfacen la ecuación al sustituir $x_1 = s_1; x_2 = s_2; \dots; x_n = s_n$.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un **Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)** es un conjunto finito de ecuaciones lineales cada una de ellas con las mismas variables.

En símbolos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{m3}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{array} \right.$$

Si un **SEL** tiene **solución única**, es un conjunto de valores que **simultáneamente** es solución de cada ecuación del sistema. Si un **SEL** tiene más de una solución, el conjunto formado por sus soluciones se denomina **conjunto solución** o, algunas veces, **solución general del SEL**, y se lo denota con la letra S

Un **SEL** con coeficientes reales se clasifica según las características de su conjunto solución como:

Sistema Compatible (o Consistente) Determinado (SCD), si su conjunto solución es único, es decir, $S = \{(s_1; s_2; \dots; s_n)\}$

Sistema Compatible (o Consistente) Indeterminado (SCI), si posee infinitas soluciones, es decir, S posee infinitos elementos (no cualesquiera) que son las soluciones del sistema. A cada una de estas soluciones se las llama ***solución particular***.

Sistema Incompatible (o Inconsistente) (SI), si no tiene solución, es decir, $S = \{\emptyset\}$

Sistema Compatible Determinado (SCD)	Sistema Compatible Indeterminado (SCI)	Sistema Incompatible (SI)
Solución única	Infinitas soluciones	No tiene solución

Al proceso de encontrar algún conjunto solución de un **SEL** se lo conoce como **resolución de un SEL**.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se llaman **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

son equivalentes, pues ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución. $S = \{(2; 1)\}$

Las siguientes **operaciones elementales entre ecuaciones** de un **SEL** permiten transformar un sistema dado en uno **equivalente**, (independientemente del orden y la cantidad de veces que se empleen):

- Intercambio de dos ecuaciones cualesquiera del **SEL**.
- Multiplicación de cualquiera ecuación del sistema por una constante no nula.
- Reemplazo de cualquier ecuación del sistema por el resultado de la suma o resta entre ésta y un múltiplo de cualquier otra ecuación perteneciente al **SEL**.

Para resolver un sistema, se intentará transformar el sistema dado en uno equivalente que resulte más sencillo para encontrar su solución. Por ejemplo, un sistema escalonado, en el cual cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matrices- Forma matricial de un SEL

Una matriz A de orden $m \times n$ es una tabla o arreglo rectangular de elementos, por ejemplo, de números reales con m reglones (o filas) y n columnas (los reglones son horizontales y las columnas son verticales).

Se escribe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si sus elementos son números reales.

Los números reales en la matriz se los denominan elementos o entradas. Se denota como a_{ij} al elemento del reglón i y la columna j .

Se denomina **matriz cuadrada**, a una matriz A cuyo número de filas es igual a su número de columnas. Entonces, $m = n$ así que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Se llama **matriz identidad**, I_n de orden $n \times n$, a la matriz en la cual todos elementos son cero excepto los de la diagonal principal, que valen 1.

En símbolos: $I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

valor se reemplaza en la siguiente ecuación para despejar la incógnita x_{n-1} y así siguiendo hasta obtener los valores de todas las incógnitas.

Podemos ver un ejemplo en el siguiente video:

□ <https://youtu.be/sHBlmYy7-0U>

Su interpretación geométrica la veremos en otra unidad.

En la clase y en otros videos del mismo canal podrán ver la explicación de este tema para los casos en que el **SEL** resulte compatible indeterminado o bien incompatible.



Si en algún video se explica algo que contradice lo dicho en las Notas de Cátedra, no dudes en consultar con tu docente o en las clases de consulta.

Un **Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo (SELH)** es aquel en el cual el término independiente en cada ecuación es cero.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = 0 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = 0 \\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{m3}\mathbf{x}_3 + ... + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = 0 \end{array} \right.$$

Una solución particular de este tipo de sistemas es $(0;0;\dots;0)$ denominada ***solución trivial***, en consecuencia, los ***SELH*** son ***siempre compatibles***.

La ‘tarea de resolución’ en este caso consiste en determinar si es **compatible determinado (SCD)** o **compatible indeterminado (SCI)**. En caso de que sea **SCD**, su conjunto solución es necesariamente $S = \{(0;0;\dots;0)\}$. En caso de que sea un **SCI**, tendrá **infinitas soluciones** (no cualesquiera) entre las cuales siempre se encuentra dicha **solución trivial**.

Función determinante

La función determinante es una correspondencia que le asigna a cada *matriz cuadrada* A , un **único número real**. Se simboliza $\det(A)$ ó $|A|$.

- **Determinante de una matriz de orden 1**

Si $A = [a_{11}]$, se define $\det(A) = a_{11}$

- **Determinante de una matriz de orden 2**

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, se define $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

- **Determinante de una matriz de orden $n > 1$ (Regla de Laplace)**

Si A es una matriz cuadrada, entonces el *menor* del elemento a_{ij} es el número real que se denota M_{ij} y se define como el determinante de la matriz que se obtiene al *eliminar* de A la i – *ésimafila* y la j – *ésimacolumna*.

El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota C_{ij} y se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij} .

Se puede calcular el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ multiplicando los elementos de cualquier línea (fila o columna) por sus cofactores y sumando los productos que

resulten.

O sea, para cada $1 \leq i \leq n$, para cada $1 \leq j \leq n$:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}, \text{ (desarrollo por la } i - \text{ésima fila)}$$

O

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}, \text{ (desarrollo por } j - \text{ésima columna)}$$

Siguiendo este procedimiento de *desarrollo por cofactores*, podemos calcular el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden.

A modo de ejemplo desarrollamos el determinante de una matriz de 3×3 :

Determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, desarrollando por la primera fila, resulta:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = \\ &= a_{11} \underbrace{(-1)^{1+1}}_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \underbrace{(-1)^{1+2}}_{(-1)} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \underbrace{(-1)^{1+3}}_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Podemos ver un Ejemplo en el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=g3rT-Ozvs1s>



Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \underbrace{(-1)^{1+1}}_1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \underbrace{(-1)^{1+2}}_{(-1)} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \underbrace{(-1)^{1+3}}_1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 5) - 2 (0 \cdot 0 - 1 \cdot 5) + 3 (0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = 1.5 - 2 \cdot (-5) + 3(-2) = 4 \end{aligned}$$

Regla de Cramer

Si tenemos un **SEL** de n ecuaciones con n incógnitas, con matriz asociada A tal que $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema es *compatible determinado* y su única solución es

$S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar la j - ésima columna de A , por B .

Observación: Si $\det(A) = 0$, entonces el sistema puede ser **compatible indeterminado o incompatible**

Podemos ver un Ejemplo en el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=g3rT-Ozvs1s>



GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS N°0 Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. i) Identifique aquellos sistemas de ecuaciones que considere lineales y arme su **matriz ampliada**.

ii) Resuelva por el **Método de Eliminación Gaussiana** los sistemas lineales del ítem anterior y clasifíquelos según su conjunto solución.

a)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y - x = 7 \\ 3x - 3 = -2y \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 3 = x + y + z \\ x - z = 1 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2y - x - z = 7 \\ 3x - 3 = -2y \end{cases}$$

k)

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

2.

a) Determine si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible (determinado o indeterminado) o incompatible:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 6 \\ -2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

b) ¿Se podría conseguir que el SEL fuera compatible determinado, suprimiendo una de las ecuaciones? Justifique la respuesta.

3. Dado el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

a) Indique si el par $(2; -1; 0)$ es solución del sistema ¿Es la única solución? Justifique su respuesta.

b) Sustituya, si es posible, la segunda ecuación por otra ecuación lineal de tal manera que el sistema resultante tenga: i) ninguna solución ii) exactamente dos soluciones, iii) infinitas soluciones, iv) exactamente las mismas soluciones que el sistema dado.

4. Determinar a qué sistema pertenece cada uno los siguiente conjuntos solución.

1) $S = \{(2 + t; t; -5 - 5t) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

2) $S = \{(t; 3 - t) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3) $S = \{(1; t; t) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

4) $S = \{(x; y) \in \frac{\mathbb{R}^2}{x; y} = t(1; -1) + (0; 2) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$

d) $\begin{cases} y = 3 - x \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$

5. Resuelva analíticamente los siguientes SEL utilizando forma matricial y/o Regla de Cramer según sea conveniente. Clasifique el SEL de acuerdo con el conjunto solución hallado.

a)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x - z = 4 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 4 \\ x + 4y = 5 \\ 2x - 6y + 2z = 3 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} -3x + y - z = -4 \\ 5x - 2y + z = 6 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} -x + y = -2 \\ x - y = 4 \\ x + y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 3 \\ -x + y + 2t = -1 \\ -x + 7y + 2z + 8t = 1 \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$$

6. Encuentre los determinantes de cada una de las siguientes matrices mediante el desarrollo por cofactores. En cada caso, elija la fila o la columna que implique la mínima cantidad de cálculos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Utilice determinantes para indicar para que valores de $k \in \mathbb{R}$, el SEL es compatible determinado.

Para los valores de k en los que el SEL no es compatible determinado ¿cómo resulta el SEL?

a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + ky = 8 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = k \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x + ky = 0 \\ (k-2)x + 5y = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + 2y = 3 \\ 2x + y + kz = 2 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ 5x - 8y + (k^2 - 2)z = k \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + (k-1)z = k \\ x + y + z = k + 1 \end{cases}$$