

UNIDAD N° 3: ÁLGEBRA MATRICIAL

MATRICES

Una matriz A puede pensarse como una tabla o arreglo rectangular de números reales con m renglones (o filas, horizontales) y n columnas (verticales). Los números m y n designan el orden de A . Puede escribirse $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Veamos un caso:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ -3 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}; A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

A los números reales (o complejos) que aparecen en la matriz se los denomina elementos. El elemento en el renglón i y la columna j se lo denota como a_{ij} . Por ejemplo, en A , el elemento a_{31} es -3 . Los elementos donde $i = j$, son los que están sobre la **diagonal principal**.

Si en $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $m = n$, decimos que A es **cuadrada**. Cuando $m \neq n$, A será **rectangular**.

Una **matriz diagonal** de orden $n \times n$ (es decir cuadrada) es aquella en que los elementos fuera de la diagonal principal son obligatoriamente ceros.

Dos matrices A y B son **iguales** cuando tienen el mismo orden, y todos y cada uno de sus elementos tienen el mismo valor algebraico.

OPERACIONES CON MATRICES

Trasposición

La matriz traspuesta, A^t de la matriz A es la matriz que se obtiene cambiando (mejor, permutando) las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A . Sea A una matriz de orden $m \times n$ y, $B = A^t$ entonces B es la matriz $n \times m$ con $b_{ij} = a_{ji}$.

<https://youtu.be/aTsgBk34zyY>



Multiplicación por un número real

Sea A una matriz y c un número real (también llamado escalar), definimos el producto del real por la matriz, cA , como la matriz que se obtiene multiplicando cada elemento A de por c . En símbolos, $(cA)_{ij} = c(a_{ij})$. Si $c = -1$, será $(-1)A = -A$ (matriz opuesta).

<https://youtu.be/GUW0nB9pk1M>



Adición

Sean A y B matrices del mismo orden, entonces su suma $A+B$, se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición. En símbolos, $(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definiremos la sustracción $A-B = A+(-B)$, o bien se obtiene restando elementos que ocupan la misma posición. En símbolos, $(a-b)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

<https://youtu.be/M43gjTOO8EM>



<https://youtu.be/WNTzd94Hpks>



Multiplicación entre matrices

Sea A una matriz con orden $m \times n$ y B una matriz con orden $n \times p$, entonces el producto $A.B$ está definido, y tiene orden $m \times p$. El elemento $(ab)_{ij}$ se obtiene al multiplicar cada elemento del reglón i de A por cada elemento respectivo de la columna j de B , y sumar tales productos.

En símbolos: $(ab)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

La división entre matrices no está definida.

<https://youtu.be/eRBuGozq6Us>



La matriz identidad, I_n de orden $n \times n$ es la matriz cuadrada en la cual todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal, que valen 1. En símbolos: $I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Una **matriz nula** N , es una matriz en la cual todos los elementos son ceros.

Las operaciones de **adición**, **multiplicación por un escalar** y **multiplicación entre matrices** cumplen las siguientes **propiedades**:

Sean A, B, C, N e I matrices de orden $n \times n$. Por otro lado, c y d son números reales.

$A + (B + C) = (A + B) + C$	Propiedad asociativa de la adición
$A + B = B + A$	Propiedad conmutativa de la adición
$A + N = A = N + A$	Elemento neutro de la adición
$A + (-A) = N = (-A) + A$	Elemento inverso de la adición
$c(A + B) = cA + cB$	Propiedad distributiva
$(c + d)A = cA + dA$	Propiedad distributiva
$1A = A$	Elemento neutro escalar
$0A = N$	Elemento absorbente escalar
$A(BC) = (AB)C$	Propiedad asociativa de la multiplicación entre matrices
$AI = A = IA$	Elemento neutro de la multiplicación entre matrices
$A(B + C) = AB + AC$	Propiedad distributiva
$(A + B)C = AC + BC$	Propiedad distributiva
$AN = N = NA$	Multiplicación por matriz nula
$(A + B)^t = A^t + B^t$	Trasposición de una suma
$(cA)^t = cA^t$	Trasposición de un producto escalar
$(AB)^t = B^t A^t$	Trasposición de un producto matricial

El producto entre matrices **no es conmutativo**, en general, $A \cdot B$ no es igual a $B \cdot A$.

A lo largo de la guía de Actividades cuando el logo  de Geogebra® aparezca en el enunciado de un problema, se está sugiriendo resolverlo o verificarlo con dicho software. Se puede descargar gratuitamente en el celular o PC. ¡Pero no olvidar la resolución analítica!



1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule, cuando sea posible:

a) $A + B$

b) $C + F$

c) $5E$

d) $3A - 6G + 6N$

e) $3E$

f) $A \cdot B$

g) $B \cdot A$

h) $B \cdot E \cdot I$

Podemos verificar los resultados de este problema y de los siguientes en Geogebra®, consultando:

<https://www.geogebra.org/m/aW3Z7dvH>





2. Con las matrices del ejercicio 1. opere, cuando sea posible:

- a) $A \cdot A$ b) $B \cdot B$ c) $A \cdot (B \cdot E)$ d) $A \cdot C^t$



3. Con las matrices del ejercicio 1., calcule:

- a) $(A + G)^t$; b) $A^t + G^t$; c) Verifique que los resultados obtenidos coinciden.

4. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

- a) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 b) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$
 c) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^2 A = A A^2$
 d) $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n} : AC + CB = (A + B) \cdot C$
 e) $= A^2 \cdot B^2$

INVERSIÓN DE MATRICES CUADRADAS

Una matriz cuadrada A puede tener una **matriz inversa**, que se escribe como A^{-1} , si:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A.$$

Si A tiene inversa se dice que A es **invertible** o **regular**.

Si no tiene inversa se dice que A es **no invertible** o **singular**.

Si la inversa de A existe, es única.

Una **matriz ortogonal** de orden $n \times n$ es aquella en la que se cumple que $A^t = A^{-1}$

Propiedades más importantes para las matrices invertibles

Sea A, B matrices cuadradas de orden n :

- $(A^{-1})^{-1} = A$ Si A es invertible, A^{-1} es invertible.
 $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ Si A es invertible y c un escalar no nulo, cA es invertible.
 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Si A y B son invertibles y del mismo orden, AB es invertible.
 $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ Si A es invertible, A^t es invertible.
 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ Si A es invertible, A^k es invertible. k es un número natural.

Para invertir una matriz cuadrada, cuando eso sea posible, se usará el método de **Gauss-Jordan**, que no es más que la aplicación del método de Gauss, pero haciendo ceros también arriba de la diagonal de la matriz

<https://youtu.be/lrh5MKNZihQ>



<https://youtu.be/W214PLI0quQ>



El profesor del video dice varias veces “divido en lo que sea”. ¿Es esto correcto? ¿Cualquier número puede ser denominador?

Aquí hay dos asuntos para destacar:

a) Una vez que se piensa obtenida la inversa de una matriz, si es que la posee, solo es una buena candidata a serlo. Es imprescindible la verificación, es decir, habrá que efectuar el producto (aquí en el orden que se prefiera, ¿por qué?) y verificar que cumpla la definición:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

b) Es particularmente importante saber si la matriz posee inversa. Será un conocimiento muy importante y desarrollaremos en la unidad siguiente una herramienta para saberlo rápido.



5. Utilice el método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Encuentre todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tales que $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$

Muestre un caso en donde esto ocurra.

7. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ es solución de la ecuación $X^2 - X + 2I = N$.

Si se tiene $AX = B$ y la matriz A es invertible, entonces se puede decir que $X = A^{-1}B$ si se multiplican, **a la izquierda** en este caso, ambos miembros de la ecuación por A^{-1} .

8. Encuentre, usando la idea de matriz inversa, la manera de despejar la matriz X en las siguientes ecuaciones:

- a) $A \cdot X = B$
- b) $X \cdot A = B$
- c) $A \cdot X \cdot B = C$

d) $A \cdot X = A \cdot B - I$ (I es la matriz identidad)

9. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, resuelva la ecuación $B \cdot X = A$.

(Consejo: primero resuelva la ecuación, como en el ejercicio 1 y luego reemplace por los datos, con las matrices dadas)

10. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, resuelva las ecuaciones:

a) $X \cdot A = B + I$

b) $X \cdot A + B = C$

c) $A \cdot X + B = C$

d) $A \cdot X + B \cdot X = C$

11. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ halle la matriz X que verifique $(X + A)^t = B$

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Un **SEL** se puede escribir como $AX = B$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ es la } \textbf{matriz de coeficientes} \text{ de tal sistema,}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ es la matriz columna de las } \textbf{incógnitas}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ es la matriz columna de los } \textbf{términos independientes}.$$

Puede verificarse:

$$A \cdot X = B, \text{ así que } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Entonces se obtendrá:

[illegible]

Si el **SEL** tuviera tantas ecuaciones como incógnitas, la matriz A de los coeficientes sería cuadrada. Si, además, esa matriz A fuera regular, se ha visto que $X = A^{-1}B$, lo cual resuelve inmediatamente el **SEL**.

12. Resuelva aplicando el concepto de matriz inversa, si fuese posible:

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x - 3y = 1 \\ -6x + 2y = 2 \end{cases}$