

UNIDAD N° 7 : ESPACIOS VECTORIALES Y TRASFORMACIONES LINEALES

Espacios vectoriales:

Definición: Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V en el que están definidas:

- Una ley de composición interna denominada *suma*, en la cual, a cada par de elementos $u, v \in V$, asocia un elemento $w \in V$ denotado $w = u + v$.
- Una ley de composición externa denominada *producto por escalares*, en la cual, a cada número $\alpha \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y a cada elemento $u \in V$ asigna un elemento $v = \alpha \cdot u \in V$

Deben cumplir las siguientes condiciones (axiomas):

1. *Conmutatividad:* $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;
2. *Asociatividad:* $v + (u + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$;
3. Existencia de *elemento neutro aditivo*, $O \in V$, tal que: $O + u = O = u + O$, $\forall u \in V$;
4. Existencia de *elemento opuesto*, $\forall u \in V$, $\exists (-u)$, tal que: $u + (-u) = O$;
5. *Distributividad respecto de escalares:* $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall u \in V$;
6. *Distributividad respecto de los vectores:* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall \alpha \in K \wedge \forall u, v \in V$;
7. *Asociatividad respecto de los escalares:* $\alpha(\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta)u$, $\forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall u \in V$;
8. Existencia de *elemento neutro multiplicativo*, $1 \cdot u = u$, $\forall u \in V$;

Propiedades: A partir de los axiomas de espacio vectorial se deducen las siguientes propiedades básicas donde $0, \alpha, \beta \in K \wedge u, v \in V$:

1. el elemento neutro $O \in V$ es único; también es único el opuesto de un elemento u ;
2. $0 \cdot u = O$, $\forall u \in V \wedge \alpha \cdot O = O$, $\forall \alpha \in K$;
3. si $\alpha \cdot u = O \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = O$;
4. si $\alpha \cdot u = \beta \cdot u \wedge u \neq O \Rightarrow \alpha = \beta$;
5. si $\alpha \cdot u = \alpha \cdot v \wedge \alpha \neq 0 \Rightarrow u = v$;
6. $(-1) \cdot u = -u$, $\forall u \in V$.

A continuación, se presentan, a modo de ejemplos, algunos de los espacios vectoriales reales o complejos V que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones:

1. $V = \mathbb{R}^n$, el conjunto de las n -uplas $(x_1; \dots; x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, con la suma definida por: $(x_1; \dots; x_n) + (x'_1; \dots; x'_n) = (x_1 + x'_1; \dots; x_n + x'_n)$ y el producto por escalares reales $\alpha(x_1; \dots; x_n) = (\alpha x_1; \dots; \alpha x_n)$.
2. $V = K^{m \times n}$ ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) el conjunto de matrices de m filas por n columnas cuyas componentes son elementos de K , con la suma y producto por escalares usuales.
Los invitamos a mirar el siguiente video:



https://youtu.be/IC9_jKAC3u8

Subespacio vectorial

Definición: Dado un espacio vectorial V , se llama **subespacio** a todo subconjunto S del mismo que, con las mismas operaciones definidas en V , sea él mismo un espacio vectorial.

Condiciones que debe cumplir un subconjunto para que sea un subespacio vectorial y algunos ejemplos:



https://youtu.be/DLIGZU_G1fs

Generadores

Definición: El subespacio S de todas las combinaciones lineales de un subconjunto de los vectores de un espacio vectorial V , se llama **subespacio generado** por tal subconjunto. Se puede decir que este último es un **conjunto de generadores** de S .

Detalles de esta definición y la resolución de algunos ejemplos:



https://youtu.be/y7pB4f_bKmY

Base

Definición: Si un espacio vectorial V es generado por un conjunto de vectores, **finito** y **linealmente independiente**, dicho conjunto es una base B de V .

Todo espacio vectorial, bajo las condiciones enunciadas hasta aquí, tiene una base. La cantidad de vectores de B , se llama **dimensión** de B . Se escribe $\dim(B)$.

Ejemplos:

- Determine si el conjunto de vectores $S = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (1; 1; 1)\}$ constituye un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$. Establezca también si dicho conjunto es base de $\mathbb{R}^3$ y su dimensión.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3-v_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3-v_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 En $\mathbb{R}^3$, el conjunto S (con **tres** vectores) es LI, entonces es base de $\mathbb{R}^3$ y $\dim(S) = 3$.

- Ídem al anterior con $S = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (1; 1; 0)\}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3-v_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3-v_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 En $\mathbb{R}^3$, el conjunto S (con **tres** vectores) es LD, entonces S no es base de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, genera un subespacio de $\mathbb{R}^3$ (¿Cuál, si se sabe que con v_1 y v_2 el conjunto S es LI?). Será $\dim(S) = 2$.

Detalles sobre la definición de base y dimensión de un subespacio vectorial y ejemplos variados:



<https://youtu.be/SCqugSQRTao>

Transformaciones Lineales, (TL):

Si V y W son espacios vectoriales, y T es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un único vector $T(v) \in W$, se dice que T aplica (mapea) V en W y se escribe $T: V \rightarrow W$. Además si T asocia el vector w al vector v se escribe $w = T(v)$ y se dice que w es la imagen de v bajo T .

Definición: Se denomina *transformación lineal*, *función lineal* o *aplicación lineal* a toda aplicación cuyo dominio V y codominio W sean espacios vectoriales y se cumplen las siguientes condiciones, T es lineal si y sólo si $\forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall u, v \in V$:

a. $T(u + v) = T(u) + T(v)$

b. $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$

Combinando a. y b. tenemos: $T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot T(u) + \beta \cdot T(v)$

Propiedades: Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces:

1. $T(O_v) = O_w$

2. $T(-u) = -T(u)$

Ejemplos de transformaciones lineales:

1. Sea V un espacio vectorial donde está definido el producto escalar y supóngase que W es un subconjunto de V . La función denominada **proyección ortogonal de un vector de V sobre W** es una transformación lineal.

2. Sea A una matriz fija de $m \times n$. Si se utiliza la notación matricial para vectores en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, entonces se puede definir una función $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por medio de: $T(X) = A \cdot X$. Observe que $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, entonces $A \cdot X \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

T es lineal pues cumple con las condiciones a. y b.: sean $u, v \in \mathbb{R}^{n \times 1} \wedge k \in K$:

a. $A(u + v) = Au + Av$

b. $A(k \cdot u) = k \cdot (Au)$

Estas transformaciones lineales se conocen como **transformaciones matriciales**.

3. Otro caso es una transformación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $T(V) = A \cdot V$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} ; \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

Sean $e_1, e_2, \dots, e_n$ los versores fundamentales, si: $T(e_1) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$,

$$T(e_2) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(e_n) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ se tiene:}$$

$$T(V) = A \cdot V = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + v_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= v_1 T(e_1) + v_2 T(e_2) + \dots + v_n T(e_n)$$

La matriz A tiene por columnas los transformados de $e_1, e_2, \dots, e_n$ respectivamente.

Esta matriz se denomina **matriz estándar** asociada a la transformación T y se la denota $A = S_T$.

Detalles sobre las definiciones asociadas a las transformaciones lineales, aplicaciones y ejemplo:



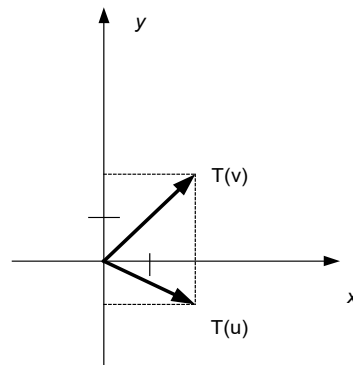
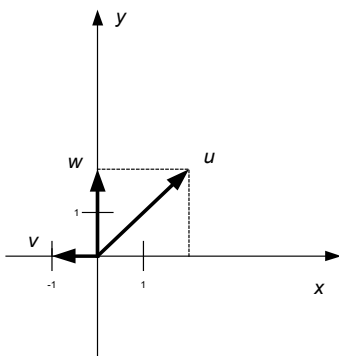
https://youtu.be/ktgkfQITh_k

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS N° 7

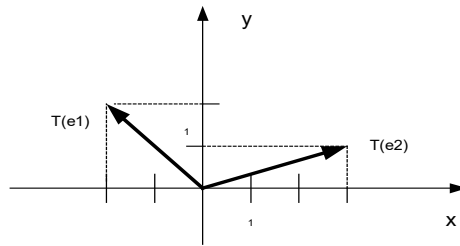
Espacios vectoriales y transformaciones lineales

- En los siguientes ítems aparecen conjuntos de objetos en $\mathbb{R}^2$. Determine cuáles de ellos cumplen ley de composición interna y/o externa con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, definidas como:
 - $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ con $x_1; x_2; y_1; y_2 \in \mathbb{R}$.
 - $c \cdot (x_1; y_1) = (c \cdot x_1; c \cdot y_1)$ con $c \in \mathbb{R}$.
 - $V = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 0 \}$
 - $V = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y = 5 \}$
- En los siguientes ítems aparecen conjuntos de objetos en $\mathbb{R}^3$. Determine cuáles de ellos cumplen ley de composición interna y/o externa con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, definidas como:
 - $(x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ con $x_1; x_2; y_1; y_2; z_1; z_2 \in \mathbb{R}$.
 - $c \cdot (x_1; y_1; z_1) = (c \cdot x_1; c \cdot y_1; c \cdot z_1)$ con $c \in \mathbb{R}$.

- a) $V = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \}$
 b) $V = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0 \}$
 c) $V = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 5 \}$
3. Sean los conjuntos V , con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, dadas como sigue:
- Adición en $\mathbb{R}^{n \times n}$
 - Multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^{n \times n}$
- a) $V = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / a_{11} = 0 \}$ b) $V = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es diagonal} \}$
 En cada caso, ¿Es V , con estas operaciones un espacio vectorial?
4. Sea $V = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 1 \}$ con las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por un escalar *usuales*. Demuestre que V , con las operaciones definidas, no es un espacio vectorial.
5. Determine, para cada conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$, si constituye un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^2$. Establezca también, en cada caso, si dicho conjunto es base de $\mathbb{R}^2$ y su dimensión.
- a) $S = \{ (0; 1); (1; 0) \}$
 b) $S = \{ (1; 0); (0; 1); (1; 1) \}$
 c) $S = \{ (2; -1) \}$
6. Determine, para cada conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, si constituye un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$. Establezca también, en cada caso, si dicho conjunto es base de $\mathbb{R}^3$ y su dimensión.
- a) $S = \{ (0; 1; 1); (1; 0; 2) \}$
 b) $S = \{ (1; 0; 0); (0; 5; 0); (2; 2; 2) \}$
 c) $S = \{ (2; 0; -1); (0; 1; 0); (2; -1; -1) \}$
7. Sean u, v y w vectores de $\mathbb{R}^2$ y $T(u)$ y $T(v)$ son las imágenes de u y v bajo la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dibuje $T(w)$.



8. Dados $T(e_1)$ y $T(e_2)$, trace $T(2;1)$:



9. Dada $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ determine, en cada caso, si T es una transformación lineal:

a) $T(x; y) = (2x; y)$ b) $T(x; y) = (x; y + 1)$ c) $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

10. Dada $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ determine, en cada caso, si T es una transformación lineal:

a) $T(x; y; z) = (y; x; z)$ b) $T(x; y; z) = (x+1; y+2; 0)$ c) $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

11. Encuentre la matriz estándar de cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ b) $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

12. Escriba una función que no sea una transformación lineal.

13. Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1; 2) = (-1; 0; 2) \quad \text{y} \quad T(2; 1) = (0; 2; -1)$$

- a) Halle la matriz estándar asociada a la TL.

- b) Exprese $T(x; y)$.

14. Investigue, en cada caso, si existe una única transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que satisfaga las condiciones indicadas. En caso afirmativo, encuentre la expresión de $T(x; y; z)$:

a) $T(1; 2; 0) = (4; -1; 1)$, $T(0; 1; 1) = (2; 0; 1)$, $T(0; 1; 2) = (2; 0; 2)$

b) $T(1; 1; 1) = (0; 2; 1)$, $T(0; 1; 1) = (0; 2; 0)$, $T(1; 0; 1) = (0; 2; 2)$

15. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una TL, tal que su matriz estándar es $S_T = \begin{bmatrix} 2+k & -k \\ 5 & k \end{bmatrix}$. Encuentre

todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, tal que $T(1; k) = (0; 6)$.

APLICACIONES GEOMÉTRICAS (Lectura optativa)

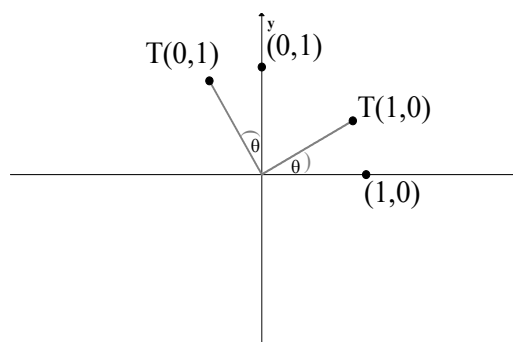
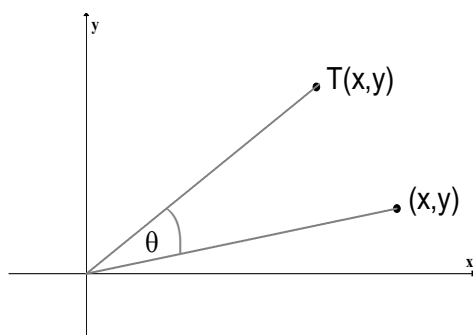
Trasformaciones lineales en el plano

Estudiaremos las **propiedades geométricas** de las transformaciones lineales en el plano, es decir, transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuya matriz estándar es:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Analizaremos en particular cinco transformaciones lineales planas que tienen especial importancia desde el punto de vista geométrico: **rotaciones**, **reflexiones**, **expansiones**, **compresiones** y **deslizamientos cortantes o cizallamientos**.

- **Rotaciones:** Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hace girar cada punto en el plano alrededor del origen hasta describir un ángulo θ :



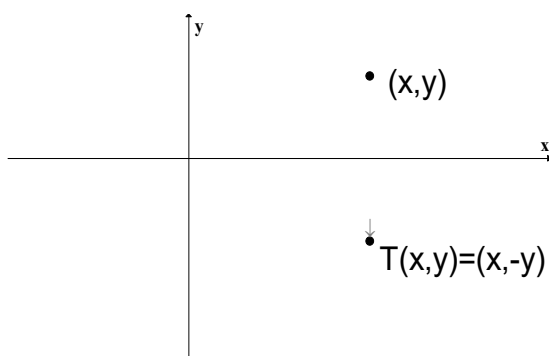
$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{la matriz estándar para } T \text{ es:}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Esta transformación lineal se conoce como **rotación de $\mathbb{R}^2$ hasta describir el ángulo θ en sentido antihorario**.

- **Reflexiones:** Una *reflexión respecto de una recta L que pasa por el origen*, es una transformación lineal que a cada punto del plano le hace corresponder su imagen “como en un espejo”, respecto a la recta L .

- **Reflexión respecto al eje x :**

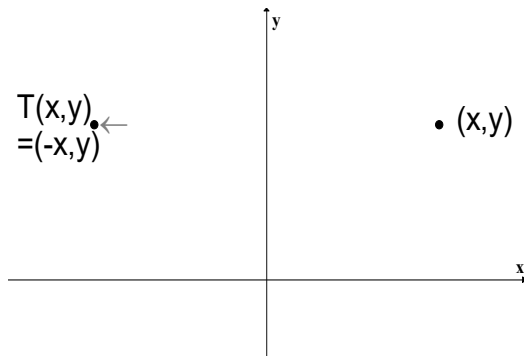


$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

matriz estándar de *reflexión respecto del eje x* :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Reflexión respecto al eje y :

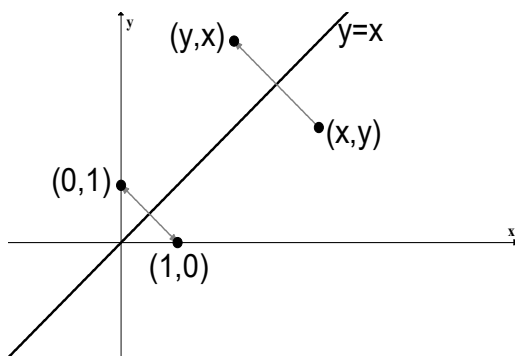


$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matriz estándar de *reflexión respecto del eje y* :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexión respecto a la recta $y = x$:



La transformación lineal es:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \text{ luego la}$$

matriz estándar para la *reflexión respecto de la recta $y = x$* es:

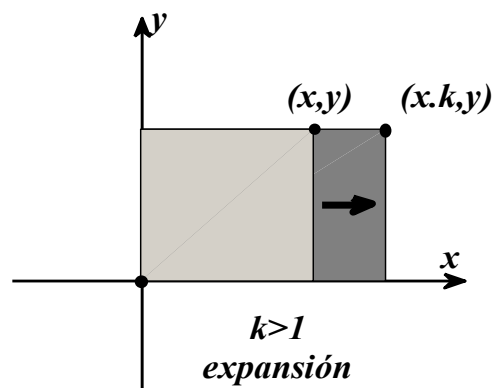
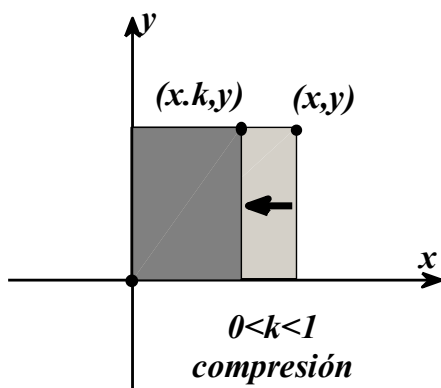
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

➤ Expansiones y Compresiones

- Si la coordenada x de cada punto del plano se multiplica por una constante positiva k , el efecto es *expandir o comprimir* cada figura plana *en la dirección x* .

A estas transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$ se las denomina *expansión (o compresión) en la dirección x con el factor k* y su matriz estándar es:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Del mismo modo, si la coordenada y de cada punto se multiplica por una constante positiva k se obtiene una expansión (o compresión) en la dirección y con el factor k .

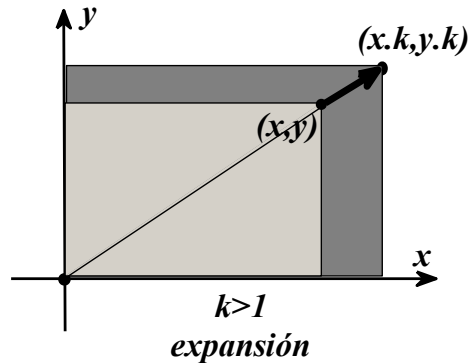
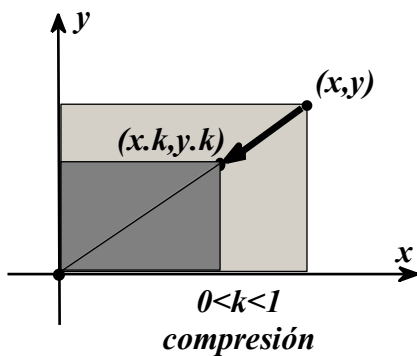
La matriz estándar de la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

- Si ambas coordenadas se multiplican por k , resulta la transformación lineal

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y su matriz estándar resulta:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

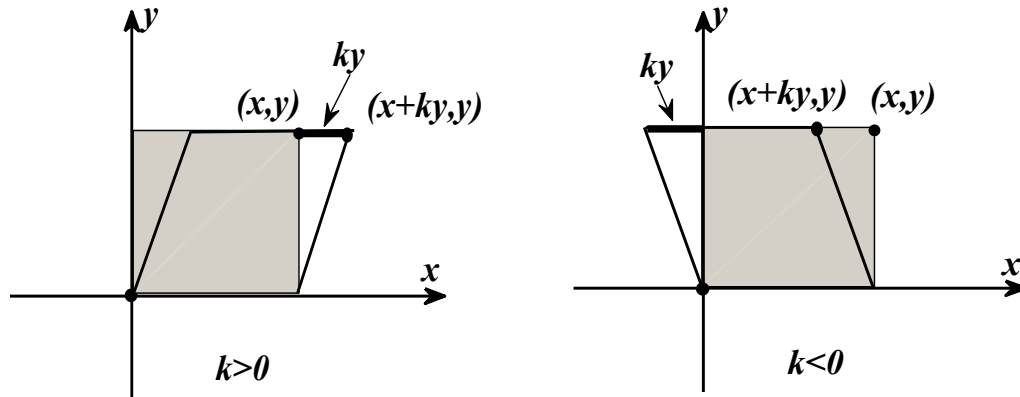


➤ **Deslizamientos cortantes (cizallamientos)**

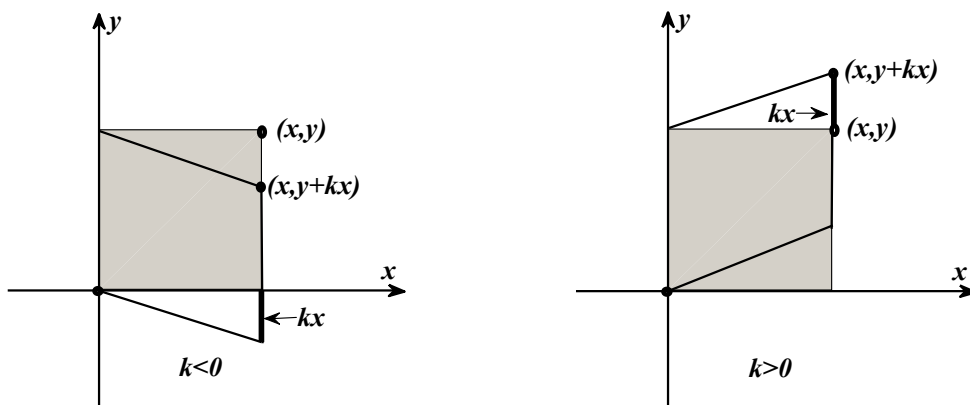
- Un deslizamiento cortante en la dirección x , con factor k , es una transformación lineal que mueve cada punto (x, y) , paralelo al eje x , en una cantidad $k \cdot y$, hacia una nueva posición $(x + ky, y)$. Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ de modo que la matriz estándar}$$

para T es: $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



- Un deslizamiento cortante en la dirección y , con factor k , es una transformación lineal que mueve cada punto (x, y) , paralelo al eje y , en una cantidad $k \cdot x$, hacia una nueva posición $(x, y + k \cdot x)$. Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + kx \end{pmatrix}$, entonces la matriz estándar para T es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$



Composición de Transformaciones Lineales

Si a un vector $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se le aplican sucesivamente las transformaciones matriciales $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: T_1(v_1) = A_1 \cdot v_1 = v_2, T_2(v_2) = A_2 \cdot v_2 = A_2 \cdot A_1 \cdot v_1 = v_3, \dots$
 $\dots, T_3(v_3) = A_3 \cdot v_3 = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot v_1 = v_4, \dots, T_k(v_k) = A_k \cdot v_k = \underbrace{A_k \cdot \dots \cdot A_3 \cdot A_2 \cdot A_1}_{A} \cdot v_1 = v_{k+1},$

donde las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces se obtiene el mismo resultado por medio de la transformación matricial única: $T(v_1) = A \cdot v_1 = v_{k+1}$, donde $A = A_k \cdot \dots \cdot A_3 \cdot A_2 \cdot A_1$

Propiedades:

Propiedad 1: Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la multiplicación por una matriz elemental, entonces la

transformación es cualquiera de las siguientes:

- a) Un deslizamiento cortante a lo largo de uno de los ejes de coordenadas.
- b) Una reflexión respecto a $y = x$.
- c) Una compresión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas.
- d) Una expansión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas.
- e) Una reflexión respecto a uno de los ejes de coordenadas.
- f) Una compresión o expansión a lo largo de uno de los ejes de coordenadas, seguida por una reflexión respecto a uno de tales ejes.

Observación: Una **matriz elemental** de 2×2 es el resultado de efectuar *una sola operación elemental sobre las líneas (filas o columnas)* de I_2 , por lo tanto será de una de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Propiedad 2: Si $T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es una multiplicación por una matriz **invertible**, entonces:

- a) La imagen de una recta es una recta
- b) La imagen de una recta que pasa por el origen es una recta que pasa por el origen.
- c) Las imágenes de rectas paralelas son rectas paralelas.
- d) La imagen del segmento rectilíneo que une los puntos P y Q es el segmento rectilíneo que une las imágenes de P y Q .
- e) Las imágenes de tres puntos están sobre una recta si y sólo si los puntos también lo están.